No. of Printed Pages : 10 **MTE–07**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2023

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Question No. **1** is compulsory.*

*(ii) Attempt any **four** questions out of the remaining question nos. **2** to **7**.*

(iii) Use of calculator is not allowed.

---

1. State whether the following statements are true *or* false. Give a short proof or a counter-example in support of your answer : 5×2=10

 (a) Every subset of real numbers, which has a lower bound, also has an upper bound.

 (b) The function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ defined by $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y}$ is continuous at (0, 0).

(c) Every function $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ is differentiable if all partial derivatives of *f* exist.

(d) If :

$$z = \tan^{-1} \frac{x-y}{x+y},$$

then :

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \tan z \, .$$

(e) The force F = $\left(2ye^x, y^2e^x\right)$ is a conservative force.

2. (a) Assuming the inequality $|\sin x| < |x|$ for all $x \in \mathbf{R}$, prove that $\lim_{x \to \pi/2} \sin x = 1$ using ε-δ definition of limit. 3

(b) Find the area of the triangular region given by subset :

$$\mathrm{D} = \{(x, y) : 0 \le x \le 1 \text{ and } 2x \le y \le 2\}$$

of $\mathbf{R}^2$. 4

(c) Check the local invertibility of the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ given by :

$$\mathrm{F}(x, y) = (2y \sin x, x + 2y + 8)$$

at $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. 3

3. (a) Prove that the function $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ defined by :

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{e^x + e^z}{2y}, & \text{if } y \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{if } y = 0 \end{cases}$$

is not differentiable at (0, 0, 0). 2

(b) Find $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \, \partial x}$, where $x^x y^y z^z = 3$, at the point (1, 1, 1). 3

(c) Find the total mass of a thin sheet, with uniform density, whose area is equal to the area of the region : 5

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 27, \ 0 \leq y^3 \leq x^2 \right\}$$

4. (a) Examine the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ defined by :

$$f(x, y) = 2x^2 - 4xy + 2y^2 + x^3 - y^3 + 2x^7$$

for extreme values at the point (0, 0). 4

(b) Find the following : 3

(i) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{e^x - 7}{2e^x + 7}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \cos \frac{1}{x}$

(c) Find the directional derivative of the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ given by $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 7$ at the point (1, 0) in the direction $\theta = \frac{\pi}{2}$. 3

5. (a) Obtain the Taylor polynomial of : 5

$$f(x, y) = x^2 y + 3y - 2 \text{ at } (1, -2).$$

(b) Examine whether the following limits exist or not : 5

(i) $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{x - \frac{\pi}{3}}$

(ii) $\lim_{x \to 0} \dfrac{5^x - 7^x}{2x}$

6. (a) Find $f \circ g$ and $g \circ f$, if they exist for the function f and g given by : 4

$$f(x, y, z) = (x + y, 2y, 5z)$$

$$g(x, y, z) = \left(e^x, \ln\left(x^2 + y^2 + 1\right), z^2\right)$$

(b) Find the surface area of the part of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, lying above the ellipse $x^2 + 4y^2 = 4$. 6

7. (a) Let :

$$e = (1,0) \text{ and } f = (1,1)$$

be in $\mathbf{R}^2$. Find $|x|, |y|$ and $|x+2y|$, where $x = e + 3f$ and $y = 5e + f$. 3

(b) Find the derivative of the function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ defined by :

$$f(t) = t^{2\sin t} + (\sin t)^{t^2}, \quad t \in \mathbf{R}$$

using the concept of total derivative. 4

(c) Let $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ and $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ be defined by :

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 5y^2}{7x^2 + y^2} \text{ and } g(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2}.$$

Show that f and g are functionally dependent. 3

MTE–07

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

एम.टी.ई.-07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) प्रश्न सं.* ***1 अनिवार्य*** *है।*

(ii) प्रश्न सं. ***2*** *से* ***7*** *तक किन्हीं* **चार** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(iii) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं **या** असत्य। अपने उत्तर के पक्ष में लघु उपपत्ति या प्रति–उदाहरण दीजिए : 5×2=10

(क) वास्तविक संख्याओं का प्रत्येक उपसमुच्चय, जिसका निम्न बंध होता है, उसका एक उपरि बंध भी होता है।

(ख) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y}$ द्वारा परिभाषित फलन $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, $(0,0)$ पर संतत है।

(ग) प्रत्येक फलन $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ के यदि सभी आंशिक अवकलजों का अस्तित्व होता है, तो वह अवकलनीय होता है।

(घ) यदि :

$$z = \tan^{-1}\frac{x-y}{x+y},$$

तब :

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \tan z$$

(ङ) $\mathrm{F} = \left(2ye^x, y^2e^x\right)$ द्वारा दिया गया बल संरक्षी है।

2. (क) सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए असमिका $|\sin x| < |x|$ मानकर और ε-δ परिभाषा द्वारा सिद्ध कीजिए कि : 3

$$\lim_{x \to \pi/2} \sin x = 1$$

(ख) $\mathbf{R}^2$ के उपसमुच्चय :

$$\mathrm{D} = \left\{(x, y) : 0 \le x \le 1 \text{ और } 2x \le y \le 2\right\}$$

द्वारा दिए गए त्रिभुजीय प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4

(ग) $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ पर $\mathrm{F}(x, y) = (2y\sin x, x + 2y + 8)$ द्वारा दिए गए फलन $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ की स्थानीय व्युत्क्रमणीयता ज्ञात कीजिए। 3

3. (क) सिद्ध कीजिए कि:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{e^x + e^z}{2y}, & \text{यदि } y \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } y = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $(0,0,0)$ पर अवकलनीय नहीं है। 2

(ख) बिन्दु (1, 1, 1) पर $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $x^x y^y z^z = 3$। 3

(ग) एकसमान घनत्व वाली एक पतली शीट का कुल द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, जिसका क्षेत्रफल प्रदेश

$$\mathrm{D} = \left\{(x, y) : 0 \le x \le 27,\ 0 \le y^3 \le x^2\right\}$$

के क्षेत्रफल के बराबर है। 5

4. (क) बिन्दु (0, 0) पर

$$f(x,y) = 2x^2 - 4xy + 2y^2 + x^3 - y^3 + 2x^7$$

द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ क चरम मानों की जाँच कीजिए। 4

(ख) निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए : 3

(i) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x - 7}{2e^x + 7}$

(ii) $\lim\limits_{x \to \infty} \cos \dfrac{1}{x}$

(ग) दिशा $\theta = \frac{\pi}{2}$ में बिन्दु (1, 0) पर

$$f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 7$$

द्वारा दिए गए फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ का दिक् अवकलज ज्ञात कीजिए। 3

5. (क) (1, −2) पर $f(x, y) = x^2 y + 3y - 2$ का टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। 5

(ख) जाँच कीजिए कि क्या निम्नलिखित सीमाओं का अस्तित्व है : 5

(i) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{x - \frac{\pi}{3}}$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x - 7^x}{2x}$

6. (क) $f(x, y, z) = (x + y, 2y, 5z)$, $g(x, y, z) = \left(e^x, \ln\left(x^2 + y^2 + 1\right), z^2\right)$ द्वारा दिए फलनों f और g के लिए $f \text{o} g$ और $g \text{o} f$ ज्ञात कीजिए यदि उनका अस्तित्व है। 4

(ख) दीर्घवृत्त $x^2 + 4y^2 = 4$ के ऊपर स्थित गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ के हिस्से का पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 6

7. (क) मान लीजिए $e=(1,0)$ और $f=(1,1)$ $\mathbf{R}^2$ में हैं। $|x|, |y|$ और $|x+2y|$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $x=e+3f$ और $y=5e+f$ । 3

(ख) संपूर्ण अवकलज की संकल्पना का उपयोग करते हुए $f(t)=t^{2\sin t}+(\sin t)^{t^2}, t\in\mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए। 4

(ग) मान लीजिए $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ और $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$:

$$f(x,y)=\frac{x^2+5y^2}{7x^2+y^2} \text{ और } g(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2}$$

द्वारा परिभाषित है। दिखाइए कि f और g फलनिकतः आश्रित हैं। 3