No. of Printed Pages : 10

MTE–02

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

(BDP)

Term-End Examination

December, 2023

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Question No.* ***7*** *is compulsory.*

(ii) Answer any ***four*** *questions from Q. Nos.* ***1*** *to* ***6****.*

(iii) Use of calculators is ***not*** *allowed.*

(iv) Show all the steps. Do your rough work at the bottom or in the side of the page.

---

1. (a) Define an injective function. Give an example of a function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ which is not injective. 2

(b) When are two vectors in $\mathbf{R}^3$ orthogonal to each other ? Check whether the vectors $2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ and $3i-2k$ are orthogonal to each other. 2

(c) Let $\mathrm{T}:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ be the linear transformation defined by :

$$\mathrm{T}(x, y) = (x+y, x-y)$$

Find the matrix of linear transformation with respect to the ordered basis {(0, 1), (1, 1)}. 2

(d) Define the eigen vector of a matrix. Check whether $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ is an eigen vector of the matrix $\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$. 2

(e) Define a skew-Hermitian matrix. Check whether the matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$ is skew-Hermitian. 2

2. (a) Define the linear span of a non-empty set S contained in a vector space V. Check whether the vector (1, 2) is in the linear span of the set {(1, 1), (1, 0)}. 2

(b) Define the determinant rank of a matrix. Find the determinant rank of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 3

(c) Check that the projection operator $P : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ defined by $P(x, y) = (x, 0)$ satisfies the polynomial $x^2 - x = 0$. 2

(d) Find the equation of the plane through the vectors $i + j + k, i + j - k, 2i + 2j + k$. Check whether the vector $i + j$ lies on the plane determined by these three vectors. 3

3. (a) Let T be a linear operator on $\mathbf{R}^3$ given by $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3, x_1 + x_2 + x_3)$. Find the matrix of T with respect to the basis {0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)}. What is the rank of T ? 5

(b) Prove that the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ is diagonalizable. Find an invertible matrix P so that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix. 5

4. (a) Let T be a linear operator on $\mathbf{R}^3$ given by $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_1 + 2x_2 + x_3)$. Find the kernel and the image of T. 5

(b) Use Cayley-Hamilton Theorem to find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. 5

5. (a) Consider the vector space $\mathbf{R}^3$ over $\mathbf{R}$ with the standard inner product. Use Gram-Schmidt procedure to find and orthogonal basis of $\mathbf{R}^3$ corresponding to an ordered basis $\mathbf{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$. 5

(b) Find the adjoint of the matrix $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Hence find its inverse. 5

6. (a) Reduce the conic $x^2 - 4xy + y^2 = 5$ to standard form and hence identify it. Also, find the associated coordinate transformation. 5

(b) Let $M_2(\mathbf{R})$ be the vector space of 2×2 matrices over $\mathbf{R}$. Let U be the subset of all symmetric matrices and V be the subset of all skew-symmetric matrices of $M_2(\mathbf{R})$. 5

Show that :

(i) U and V are subspaces of $M_2(\mathbf{R})$.

(ii) $U \oplus V = M_2(\mathbf{R})$

7. Which of the following statements are true and which are not ? Justify your answer with a short proof or by a counter-example : 2×5=10

(i) If S and T are non-empty subsets of a vector space with $T \subseteq S$, then if T is linearly dependent, S is also linearly dependent.

(ii) If S and T are linear transformations such that S o T is injective, then S is injective.

(iii) If v_1, v_2 are orthogonal to each other, the set $\{v_1, v_2\}$ is linearly independent.

(iv) An orthogonal matrix can never have zero eigen value.

(v) If W_1 and W_2 are three-dimensional substances of a five-dimensional vector space, then $W_1 \cap W_2$ is a non-zero vector.

MTE–02

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) प्रश्न सं 7 अनिवार्य है।*

*(ii) प्रश्न संख्या 1 से 6 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर लिखिए।*

(iii) कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

(iv) सभी स्टेप्स दर्शाइए। अपना रफ कार्य पृष्ठ के ऊपर तथा बगल में करें

---

1. (क) एक एकैकि फलन का उदाहरण दीजिए। एक फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ का उदाहरण दीजिए जो एकैकि न हो। 2

(ख) दो सदिश कब $\mathbf{R}^3$ लांबिक होते हैं ? जाँच कीजिए कि सदिश $2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ और $3\hat{i} - 2\hat{k}$ एक-दूसरे से लांबिक हैं। 2

(ग) मान लीजिए $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ एक रैखिक रूपान्तरण है जो $T(x, y) = (x+y, x-y)$ द्वारा परिभाषित है। क्रमित आधार $\{(0, 1), (1, 1)\}$ के सापेक्ष रैखिक रूपान्तरण का आव्यूह निकालिए। 2

(घ) एक रैखिक रूपान्तरण का आइगेन सदिश परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ आव्यूह $\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ का आइगेन सदिश है। 2

(ङ) एक विषम-हर्मिटो आव्यूह को परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि आव्यूह $\begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$ विषम-हर्मिटो है। 2

2. (क) एक सदिश समष्टि V पर आविष्ट एक अरिक्त समुच्चय का रैखिक विस्तृत परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि सदिश (1, 2) समुच्चय $\{(1, 1), (1, 0)\}$ का रैखिक विस्तृति में है। 2

(ख) एक आव्यूह को सारणिक कोटि परिभाषित कीजिए। आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ को सारणिक कोटि निकालिए। 3

(ग) जाँच कीजिए कि प्रक्षेप संकारक $P : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ जो $P(x, y) = (x, 0)$ द्वारा परिभाषित है, बहुपद $x^3 - x = 0$ को संतुष्ट करता है। 2

(घ) सदिश $i + j + k, i + j - k, 2i + 2j + k$ से गुज़रने वाला समतल का समीकरण निकालिए। जाँच कीजिए कि सदिश $i + j$ इन सदिशों द्वारा निर्धारित समतल में है। 3

3. (क) मान लीजिए रैखिक संकारक T $\mathbf{R}^3$ पर $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3, x_1 + x_2 + x_3)$ द्वारा परिभाषित है। आधार {0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)} के सापेक्ष T का आव्यूह प्राप्त कीजिए। T की जाति क्या है ? 5

(ख) दिखाइए कि आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ विकर्णनीय है।

एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह P निकालिए जिसके लिए $PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$। 5

4. (क) मान लीजिए T $\mathbf{R}^3$ पर $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_3, x_1 + x_2, x_1 + 2x_2 + x_3)$ द्वारा परिभाषित रैखिक रूपान्तरण है। T का अष्टि और प्रतिबिम्ब निकालिए। 5

(ख) कैली–हमिल्टन प्रमेय से आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम निकालिए। 5

5. (क) $\mathbf{R}$ पर मानक आन्तर गुणनफल के सापेक्ष सदिश समष्टि $\mathbf{R}^3$ लीजिए। ग्राम–श्मिट विधि से क्रमित आधार $\mathbf{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ के संगत प्रसामान्य लांबिक आधार निकालिए। 5

(ख) आव्यूह $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ का सहखण्डज निकालिए। इससे आव्यूह का व्युत्क्रम निकालिए। 5

6. (क) शांकव $x^2 - 4xy + y^2 = 5$ को मानक रूप में समानीत कीजिए और मानक रूप से इसे पहचानिए। आगे संगत निर्देशांक रूपान्तरण भी ज्ञात कीजिए। 5

(ख) मान लीजिए $M_2(\mathbf{R})$, $\mathbf{R}$ पर 2×2 वास्तविक आव्यूहों की सदिश समष्टि है। मान लीजिए U सभी सममित आव्यूहों के उपसमुच्चय हैं और V सभी विषम–सममित उपसमुच्चय हैं।

दिखाइए कि : 5

(i) U और V $M_2(\mathbf{R})$ की उपसमष्टियाँ हैं।

(ii) $U \oplus V = M_2(\mathbf{R})$

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि एक लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण से दीजिए : 10

(क) यदि S और T एक सदिश समष्टि का रिक्त समुच्चय है, $T \subseteq S$ और T रैखिकतः स्वतन्त्र हैं, तो S भी रैखिकतः स्वतन्त्र है।

(ख) यदि S और T रैखिक रूपान्तरण हैं, $S \circ T$ एकैकि है, तो S भी एकैकि है।

(ग) यदि v_1, v_2 एक-दूसरे से लांबिक हैं, तो समुच्चय $\{v_1, v_2\}$ रैखिकतः स्वतन्त्र है।

(घ) एक लांबिक आव्यूह का आइगेन मान कभी भी शून्य नहीं होता।

(ङ) यदि W_1 और W_2 एक विमा 5 वाला सदिश समष्टि की विमा 3 वालो उपसमष्टियाँ हैं, तो $W_1 \cap W_2$ शून्य सदिश समष्टि नहीं है।