

No. of Printed Pages : 8

MTE-01

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)

Term-End Examination

December, 2023

(Elective Course : Mathematics)

MTE-01 : CALCULUS

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Weightage : 70%

Note : (i) *Question No. 1 is compulsory.*

(ii) *Attempt any **four** questions from
Question Nos. 2 to 7.*

(iii) *Use of calculator is not allowed.*

1. Which of the following statements are true or false. Give a short proof or a counter-example of your answers : 2 each

(i) If $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ be defined by $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

then $f \circ (f \circ f)(x) = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$.

P. T. O.

$$(ii) \quad \frac{d}{dx} \left[\int_x^{\sin x} \cos t^2 dt \right] = \cos x.$$

$$\cos(\sin^2 x) - \cos x^2.$$

(iii) If :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2 - 16x + 20}{(x-2)^2}, & x \neq 2 \\ k, & x = 2 \end{cases}$$

then the value of k if f is continuous at $x = 2$ is 7.

(iv) If $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ then f is monotonically increasing on $] a, b [$.

(v) The range of the function f defined by

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - [x]}}$$

is $] 1, \infty [$.

2. (a) Differentiate : 5

$$\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \right) \text{ w. r. t. } \tan^{-1} x.$$

(b) Integrate : 5

$$\int e^x \left(\frac{x}{(1+x)^2} \right) dx$$

3. (a) Find the area enclosed between the parabolas : 5

$$y^2 = 4a(x+a) \text{ and } y^2 = -4a(x-a)$$

- (b) By dividing the interval [2,10] into four equal parts, find the approximate value of

$$\int_2^{10} \frac{dx}{x^2 + 4} \text{ using Simpson's rule. } 5$$

4. (a) Find the length of the arc of the curve $x = 2^y$ intercepted between $y = 0$ and $y = \ln 2$. 5

- (b) Differentiate :

$$(\log x)^x + x^{\log x}$$

with respect to x . 5

5. Trace the curve $y^2 = (x-1)(x-2)^2$. Clearly stating all the properties used for tracing it. 10

6. (a) If :

$$x = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \text{ and } y = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$$

then find $\frac{dy}{dx}$ at $t = \frac{\pi}{6}$. 5

(b) If $I_n = \int \tan^n x \, dx$, prove that :

$$I_n + I_{n-2} = \frac{\tan^{n-1} x}{(n-1)}$$

Using this find $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^5 x \, dx$. 5

7. (a) Evaluate the integral : 5

$$\int_1^2 \frac{5x^2}{x^2 + 4x + 3} \, dx$$

(b) Verify Lagrange's mean value theorem for the function f defined by : 5

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3), x \in [0, 4]$$

MTE-01

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

(ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित)

एम.टी.ई.-01 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

भारिता : 70%

नोट : (i) प्र. सं. 1 अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न संख्या 2 से 7 तक कोई चार प्रश्न कीजिए।

(iii) कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए : प्रत्येक 2

(i) यदि $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ द्वारा

परिभाषित है, तो $f \circ (f \circ f)(x) = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$

होगा।

$$(ii) \quad \frac{d}{dx} \left[\int_x^{\sin x} \cos t^2 dt \right] = \cos x.$$

$$\cos(\sin^2 x) - \cos x^2$$

(iii) यदि

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2 - 16x + 20}{(x-2)^2}, & x \neq 2 \\ k, & x = 2 \end{cases}$$

है, तो $x=2$ पर f के सतत् होने के लिए k का मान 7 होगा।

(iv) यदि $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ है, तो $f,]a, b[$ पर एकदिशीय वर्द्धमान होगा।

(v) यदि फलन $f, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-[x]}}$ द्वारा परिभाषित है, तो इसकी परिसर $]1, \infty [$ होगी।

2. (क) $\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right)$ का $\tan^{-1} x$ के सापेक्ष

अवकलन ज्ञात कीजिए। 5

(ख) निम्नलिखित समाकलन हल कीजिए : 5

$$\int e^x \left(\frac{x}{(1+x)^2} \right) dx$$

3. (क) परिवलयों $y^2 = 4a(x+a)$ और $y^2 = -4a(x-a)$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

- (ख) अंतराल $[2,10]$ को चार समान भागों में विभाजित करके, सिम्पसन नियम का प्रयोग करके $\int_2^{10} \frac{dx}{x^2+4}$ का सन्निकटन मान ज्ञात कीजिए। 5

4. (क) वक्र $x = e^y$ को रेखाओं $y = 0$ और $y = \ln 2$ द्वारा अन्तर्छेदित चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए। 5

- (ख) $(\log x)^x + x^{\log x}$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए। 5

5. वक्र $y^2 = (x-1)(x-2)^2$ का आरेखण कीजिए। ऐसा करने के लिए प्रयोग किए गये गुण-धर्मों को भी लिखिए। 10

6. (क) यदि

$$x = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \quad \text{और} \quad y = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$$

है, तो $t = \frac{\pi}{6}$ पर $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 5

(ख) यदि $I_n = \int \tan^n x dx$, है, तो सिद्ध कीजिए

कि $I_n + I_{n-2} = \frac{\tan^{n-1} x}{(n-1)}$ । इसका प्रयोग करके

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^5 x dx \quad \text{ज्ञात कीजिए।} \quad 5$$

7. (क) समाकल $\int_1^2 \frac{5x^2}{x^2 + 4x + 3} dx$ का मूल्यांकन कीजिए। 5

(ख) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, $x \in [0, 4]$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए लैग्रांज माध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए। 5