No. of Printed Pages : 15

BMTE–144

B. SC. (GENERAL)/

B. A. (GENERAL)

(BSCG/BAG)

Term-End Examination

December, 2023

BMTE–144 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : (*i*) *Question No.* ***1*** *is compulsory.*

(*ii*) *Attempt any* ***six*** *questions from Q. Nos.* ***2*** *to 8.*

(*iii*) *Use of non-programmable scientific calculators is allowed.*

---

1. State whether the following statements are true or false ? Give a short proof or a counter-example in support of your answer : 2×5=10

   (i) For decreasing the number of iterations in Newton-Raphson method, the value of $f'(x)$ must be increased.

   (ii) If the bisection method is applied to compute a root of the equation :

   $$f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 4 = 0$$

   in the interval [1, 9], the method converges to a solution after 3 iterations.

   (iii) In Jacobi's method, the coefficient matrix has no zeroes on its main diagonal.

   (iv) $\Delta = E + 1$

   (v) Newton forward difference method can be used only for unequally spaced intervals.

2. (a) Apply classical Runge-Kutta fourth order method to find an approximate value of y when x = 1.2, given that $\frac{dy}{dx} = xy$, where $y(1)$ = 2 with h = 0.2. 8

(b) Perform three iterations of the Newton-Raphson method to obtain the aproximate value of $(17)^{1/3}$ starting with initial approximation $x_0 = 2$. 7

3. (a) Given that :

$$f(0)=1,\ f(1)=3,\ f(3)=55$$

find the unique polynomial of degree 2 or less, which fits the given data. 6

(b) Jacobi iteration method is used to solve the system of equations :

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determine the rate of convergence of the method. 6

(c) Does a bound for the error $R_3(x)$ in the Taylor's series expansion for the function $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$ in [–1, 1] about $x = 0$ exist ? Justify your answer. 3

4. (a) For the following data interpolate at $x = 0.25$ using forward difference polynomial : 8

x	$f(x)$
0.1	1.40
0.2	1.56
0.3	1.76
0.4	2.00
0.5	2.28

(b) Determine the order of convergence of the iterative method :

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

for finding a simple root of the equation $f(x) = 0$. 7

5. (a) Estimate the eigenvalues of the matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

using Gerschgorin bound. Draw a rough sketch of the region where the eigen values lie. 8

(b) A particle is moving along a straight line. The displacements x of the particle at some time instance t are given below :

t	x
0	5
1	8
2	12
3	17
4	26

Find the velocity and acceleration of the particle at $t = 4$. 7

6. (a) Solve the following system by the method of LU decomposition : 8

$$2x + 3y + z = 9$$

$$x + 2y + 3z = 6$$

$$3x + y + 2z = 8$$

Take : $l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1$.

(b) Apply Lagrange's method to the given data to find the value of x when $f(x)=15$: 7

x	$f(x)$
5	12
6	13
9	14
11	16

7. (a) Solve the following system of linear equations $Ax=b$ with partial pivoting using Guass-Elimination method : 8

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$$

$$4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$

(b) If :

$$1 + \mu^2\delta^2 = C_1 + C_2\delta^2 + C_3\delta^4$$

where μ is the mean operator and δ is the central difference operator, find the values of C_1, C_2 and C_3. 7

8. (a) The equation $x^3 - x - 1 = 0$ has a root in the interval [1, 2]. Determine a suitable iteration function $g(x)$ so that the iteration method $x_k = g(x_k)$, where k = 0, 1, 2, ... converges to the root. Perform two iterations of this method with $x_0 = 1.6$.

8

(b) Obtain the approximate value of $\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ using Simpson's rule with 3 and 5 nodal points. Obtain the improved value using Romberg integration. 7

BMTE-144

बी.एस-सी. (सामान्य)/बी. ए. (सामान्य)

(बी. एस-सी. जी./बी. ए. जी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

बी. एम. टी. ई.–144 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 3 घण्टे अधिकतम अंक : 100

नोट : (*i*) प्रश्न संख्या **1** करना अनिवार्य है।

(*ii*) प्रश्न संख्या **2** से **8** तक कोई **छः** प्रश्न हल कीजिए।

(*iii*) अप्रोग्रामनीय वैज्ञानिक कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति है।

---

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति या प्रतिउदाहरण दीजिए : 2×5=10

   (i) न्यूटन-रैफ्सन विधि में पुनरावृत्तियों की संख्या में कमी करने के लिए $f'(x)$ का मान बढ़ाना चाहिए।

(ii) यदि समीकरण $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 4 = 0$ के अंतराल $[1,9]$ में मूल परिकलित करने के लिए द्विभाजक विधि का प्रयोग होता है, तो विधि का हल 3 पुनरावृत्तियों के बाद ही अभिसरित होता है।

(iii) जैकोबी विधि में, गुणांक आव्यूह के प्रमुख विकर्ण के अवयवों में कोई भी शून्य नहीं होता है।

(iv) $\Delta = E + 1$

(v) न्यूटन अग्रांतर विधि केवल असमान अंतरालों के लिए ही प्रयोग की जा सकती है।

2. (क) चिरप्रतिष्ठित चतुर्थ कोटि रुंगे-कुट्टा विधि से समीकरण $\frac{dy}{dx} = xy$, जहाँ $y(1) = 2$ के लिए $x = 1.2$ पर y का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए, जबकि $h = 0.2$ है। 8

(ख) प्रारम्भिक सन्निकटन $x_0 = 2$ से प्रारम्भ करके $(17)^{1/3}$ का सन्निकट मान प्राप्त करने के लिए न्यूटन-रैफ्सन विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ कीजिए। 7

3. (क) दिया गया है :

$$f(0)=1, f(1)=3, f(3)=55$$

घात 2 या उससे कम का अद्वितीय बहुपद ज्ञात कीजिए जो दिए गए आँकड़ों में फिट हो सके। 6

(ख) निम्नलिखित समीकरण निकाय को जैकोबी पुनरावृत्ति से हल कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

विधि की अभिसरण-दर भी निर्धारित कीजिए। 6

(ग) क्या $x = 0$ के प्रति अंतराल $[-1,1]$ में फलन $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$ क टेलर श्रेणी प्रसार में त्रुटि $\mathrm{R}_3(x)$ के परिबद्ध का अस्तित्व है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

4. (क) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए, अग्रांतर बहुपद का प्रयोग करके $x = 0.25$ पर अंतर्वेशन कीजिए : 8

x	$f(x)$
0.1	1.40
0.2	1.56
0.3	1.76
0.4	2.00
0.5	2.28

(ख) समीकरण $f(x) = 0$ का साधारण मूल ज्ञात करने के लिए पुनरावृत्ति विधि :

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

की अभिसरण कोटि निर्धारित कीजिए। 7

5. (क) गर्शगोरिन परिबद्ध से आव्यूह :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

के आइगेनमान आकलित कीजिए। उस प्रदेश का अनुमानित ग्राफ बनाइए जहाँ आइगेन मान स्थित हैं। 8

(ख) एक कण सीधी रेखा में गतिमान है। कुछ समयों t पर, कण का विस्थापन x नीचे दिया गया है :

t	x
0	5
1	8
2	12
3	17
4	26

$t = 4$ पर कण का वेग और त्वरण ज्ञात कीजिए। 7

6. (क) LU वियोजन विधि से निम्नलिखित निकाय को हल कीजिए : 8

$$2x + 3y + z = 9$$

$$x + 2y + 3z = 6$$

$$3x + y + 2z = 8$$

आप $l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1$ लीजिए।

(ख) दिए आँकड़ों पर लग्रांज विधि का प्रयोग करके x का मान ज्ञात कीजिए जब $f(x) = 15$ है : 7

x	$f(x)$
5	12
6	13
9	14
11	16

7. (क) आंशिक कीलकन के साथ गाउस विस्थापन विधि द्वारा निम्नलिखित रैखिक समीकरणों के निकाय $\mathrm{A}x = b$ को हल कीजिए : 8

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$$
$$4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3$$
$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$

(ख) यदि :

$$1 + \mu^2\delta^2 = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2\delta^2 + \mathrm{C}_3\delta^4$$

जहाँ μ माध्य संकारक और δ केन्द्रीय अंतर संकारक हो, तो $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ एवं C_3 के मान ज्ञात कीजिए। 7

8. (क) समीकरण $x^3 - x - 1 = 0$ का अंतराल $[1, 2]$ में एक मूल है। एक उपयुक्त पुनरावृत्ति फलन $g(x)$ निर्धारित कीजिए ताकि पुनरावृत्ति विधि $x_k = g(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots..$, मूल की ओर अभिसरित होती हो $x_0 = 1.6$ लेकर इस विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए। 8

(ख) 3 और 5 सोपान बिन्दुओं वाले सिम्पसन नियम से $\int_0^2 \frac{x}{1+x^2} dx$ का सन्निकट मान प्राप्त कीजिए। रॉम्बर्ग समाकल से सुधारा गया मान प्राप्त कीजिए। 7