No. of Printed Pages : 16 **BMTE–141**

BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL) (BSCG)

Term-End Examination

December, 2023

BMTE-141 : LINEAR ALGEBRA

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : (*i*) *There are eight questions in this paper.*

(*ii*) *The **eighth** question is compulsory.*

(*iii*) *Do any **six** questions from Question No. 1 to Question No. 7.*

(*iv*) *Use of calculator is not allowed.*

(*v*) *Do your rough work in a clearly identifiable part of the bottom of the same page or in the side of the page only.*

---

1. (a) Let A be an $m \times n$, B an $n \times m$ and C an $m \times m$ matrix. Which of the following operations are possible ?

(i) AB + C

(ii) CA + B

For those operations that are possible, what will be order of the matrix obtained ? 3

(b) Find the rank and the nullity of the matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

using row reduction. 3

(c) Determine the equation of the plane corresponding to the vectorspace spanned by the vectors $(1,1,1)$ and $(-1,1,1)$. 3

(d) Check whether the vector :

$$\upsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

is an eigenvector for the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Find the corresponding eigenvalue. 2

(e) Define the norm of a vector in an inner product space. Find the norm of the vector $(i, 1-i, 1+i) \in \mathbf{C}^3$. 2

(f) Find the magnitude of the volume of the box spanned by the vectors $(1,1,1), (1,1,0)$ and $(0,1,1)$. 2

2. (a) If the matrix of a linear transformation $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ with respect to the standard basis is :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

then find the linear transformation. 3

(b) Find the rank and signature for each of the forms $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ and $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$. Are these forms equivalent ? Justify your answer. 3

(c) Let $V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, c, d \in \mathbf{R} \right\}$ and $V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & r \end{bmatrix} \middle| u, v, r \in \mathbf{R} \right\}$ be subspaces of $M_2(\mathbf{R})$. Prove that $M_2(\mathbf{R}) = V_1 + V_2$. Is $M_2(\mathbf{R}) = V_1 \oplus V_2$? Justify your answer. 3

(d) Let $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ and $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

Show that $\{u_1, u_2\}$ forms an orthonormal basis for $\mathbf{R}^2$. Write the vector (3, 2) as a linear combination of u_1 and u_2. 2

(e) Let A be a 4×4 matrix. Write down the elementary matrices with which, when we multiply A on the left, will perform the following row operations on A : 2

(i) $R_2 \to 3R_2$

(ii) $R_3 \to R_3 - 3R_1$

(f) Find the values of a for which the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ is not invertible. 2

3. (a) Find the conditions on b_1, b_2 and b_3, so that the following system of equations is consistent : 7

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = b_1$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = b_2$$

$$x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 = b_3$$

(b) Find the adjugate of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Further, find its inverse of A using adjugate. 5

(c) Is the matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in Row Reduced Echelon form ? Is it in Row Reduced Form ? Justify your answer. If it is not in Row Reduced Echelon Form, use row operations to reduce it to Row Reduced Echelon Form. 3

4. (a) Check whether the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

is diagonalisable. If it is diagonalisable, find a diagonal matrix D and an invertible matrix P such that $P^{-1}AP = D$. 8

(b) Find the inverse of the following matrix using Cayley-Hamilton theorem : 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Find the values of $a, b \in \mathbf{C}$ for which the matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+b \\ a & 1 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 1 \end{bmatrix}$$

is Hermitian. 2

5. (a) Let :

$$V_1 = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}\right]$$

and

$$V_2 = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}\right\}\right]$$

be subspaces of $\mathbf{R}^3$. Find a basis for $V_1 + V_2$ and a spanning set for $V_1 \cap V_2$. 7

(b) Let $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ be defined by $T(x, y) = (x - y, x, y)$ and $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ defined by $S(x, y, z) = (x + y, x - z)$. Let B_1 and B_2 be the standard bases of $\mathbf{R}^2$ and $\mathbf{R}^3$ respectively. Check that : 8

$$\left[T \circ S\right]_{B_2}^{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1} \cdot [S]_{B_1}^{B_2}.$$

6. (a) Find the orthogonal canonical reduction of the quadratic form $x^2 - y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 2yz$. Also, find its principal axes. 9

(b) Find the vector equation of the plane determined by the points (1, 1, 1), (1, 1, 0) and (2, 2, 1). Also, check whether (2, 1, 1) lies on it. 3

(c) Define the coset of a subspace. Let :

$$W = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\} \leq \mathbf{R}^3$$

Check whether the vectors (3, 1, 2) and (1, 1, 3) are in the same coset of W or not. 3

7. (a) Let $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ be an ordered basis of $\mathbf{R}^3$, where $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 2, 3)$ and $u_3 = (4, 3, 4)$. Use Gram-Schmidt orthogonalisation process on B to find an arthonormal basis for $\mathbf{R}^3$. 5

(b) Let $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, -2), (-1, -1, 0)\}$ be a basis of $\mathbf{R}^3$. Find the dual basis of B. 5

(c) Check whether the set :

$$S = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in \mathbf{R}, a_n \leq 0\}$$

is a subspace of $\mathbf{R}^n$ or not. 3

(d) If v_1, v_2, v_3 are linearly independent vectors in a vector space V over $\mathbf{C}$, show that $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1$ are also linearly independent. 2

8. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with a short proof or a counter-example : 5×2 = 10

(a) Eigen values of a symmetric matrix are real.

(b) If $S_1 \subseteq S_2$ are subsets of a vector space V and S_2 is linearly independent, S_1 is also linearly independent.

(c) For any linear transformation $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5$ $\ker(T) \neq \{0\}$.

(d) Every unitary matrix is Hermitian.

(e) There exists a linear operator $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ with characteristic polynomial $(x-3)^2(x-5)(x-1)$ and minimal polynomial $(x-3)(x-5)$.

BMTE–141

विज्ञान स्नातक (सामान्य)

(बी. एस. सी. जी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

बी.एम.टी.ई.-141 : रैखिक बीजगणित

समय : 3 घण्टे अधिकतम अंक : 100

नोट : *(i)* *इस प्रश्न पत्र में आठ प्रश्न हैं।*

(ii) ***आठवाँ*** *प्रश्न करना अनिवार्य है।*

(iii) *प्रश्न संख्या* ***1*** *से* ***7*** *तक कोई भी* ***छः*** *प्रश्न कीजिए।*

(iv) *कैलकुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है।*

(v) *रफ कार्य उसी पेज के नीचे स्पष्ट रूप से दर्शित भाग में या पेज के बगल में करें।*

1. (क) मान लीजिए A एक $m \times n$, B एक $n \times m$ और C एक $m \times m$ आव्यूह है। निम्नलिखित में से कौन–सो संक्रियाएँ साध्य हैं ?

(i) AB + C

(ii) CA + B

जो संक्रियाएँ साध्य हैं उससे प्राप्त आव्यूह की कोटि क्या होगी ? 3

(ख) पंक्ति समानयन द्वारा आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ की जाति एवं शून्यता प्राप्त कीजिए। 3

(ग) सदिशें $(1,1,1)$ और $(-1,1,1)$ द्वारा विस्तृत सदिश समष्टि के संगत समतल का समीकरण निर्धारित कीजिए। 3

(घ) जाँच कीजिए कि सदिश $\upsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ की आइगेन सदिश है या नहीं। संगत आइगेन मान भी निकालिए। 2

(ङ) आंतर गुणन समष्टि में एक सदिश का मानक परिभाषित कीजिए। सदिश $(i, 1-i, 1+i) \in \mathbf{C}^3$ का मानक निकालिए। 2

(च) सदिश $(1,1,1), (1,1,0)$ और $(0,1,1)$ द्वारा विस्तृत बॉक्स का आयतन का परिमाण क्या है ? 2

2. (क) यदि मानक आधार के सापेक्ष रैखिक रूपांतरण $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ की आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो रैखिक रूपांतरण निकालिए। 3

(ख) समघात $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ और $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ के जाति और चिह्नक निकालिए। क्या ये समघात तुल्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(ग) मान लीजिए $V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, c, d \in \mathbf{R} \right\}$ और $V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & r \end{bmatrix} \middle| u, v, r \in \mathbf{R} \right\}$ $M_2(\mathbf{R})$ को उपसमष्टियाँ हैं। सिद्ध कीजिए कि $M_2(\mathbf{R}) = V_1 + V_2$। क्या $M_2(\mathbf{R}) = V_1 \oplus V_2$? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(घ) मान लीजिए $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ और $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$। दिखाइए कि $\{u_1, u_2\}$ $\mathbf{R}^2$ का प्रसामान्य लांबिक आधार है। सदिश (3, 2) को $\{u_1$ और $u_2\}$ के एकघात संचयन क रूप में लिखिए। 2

(ङ) मान लीजिए कि A एक 4×4 आव्यूह है। वह प्रारम्भिक आव्यूह लिखिए जिसको A को बाईं तरफ से गुणा करने पर आव्यूह A पर निम्नलिखित पंक्ति संक्रियाएँ होंगी : 2

(i) $R_2 \to 3R_2$

(ii) $R_3 \to R_3 - 3R_1$

(च) a के वे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$ व्युत्क्रमणीय नहीं है। 2

3. (क) b_1, b_2 और b_3 पर प्रतिबंध निकालिए जिससे निम्नलिखित समीकरण निकाय संगत है : 7

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = b_1$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = b_2$$

$$x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 = b_3$$

(ख) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ का सहखण्डज ज्ञात कीजिए। आगे A के सहखण्डज का प्रयोग करके A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 5

(ग) क्या आव्यूह :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

पंक्ति समानित सोपानक रूप में है ? क्या यह पंक्ति समानित रूप में है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। यदि यह आव्यूह पंक्ति समानित सोपानक रूप में नहीं है, तो पंक्ति संक्रियाओं के प्रयोग से आव्यूह को पंक्ति समानित सोपानक रूप में समानित कीजिए। 3

4. (क) जाँच कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ विकर्णनीय है। यदि विकर्णनीय है, तो आव्यूह P और विकर्ण आव्यूह D निकालिए जिससे $P^{-1}AP = D$ । 8

(ख) कैलो-हमिल्टन प्रमेय का प्रयोग करके निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम निकालिए : 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ग) $a, b \in \mathbf{C}$ उन मान को निकालिए जिनके लिए आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & i & 1+b \\ a & 1 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 1 \end{bmatrix}$ हर्मिटीय है। 2

5. (क) मान लीजिए : 7

$$V_1 = \left[\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}\right\}\right]$$

और $$V_2 = \left[\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\7\end{bmatrix}\right\}\right]$$

$\mathbf{R}^3$ का उपसमुच्चय हैं। $V_1 + V_2$ का एक आधार और $V_1 \cap V_2$ का विस्तातिक समुच्चय निकालिए।

(ख) मान लीजिए कि $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ $T(x, y) = (x - y, x, y)$ द्वारा परिभाषित है और $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ $S(x, y, z) = (x + y, x - z)$ द्वारा परिभाषित है। मान लीजिए B_1 और B_2, क्रमशः $\mathbf{R}^2$ और $\mathbf{R}^3$ के मानक आधार हैं। जाँच कीजिए कि $[T \circ S]_{B_2}^{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1} \cdot [S]_{B_1}^{B_2}$। 8

6. (क) द्विघात समघात :

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 2yz$$

का लांबिक विहित समानयन ज्ञात कीजिए। इसका मुख्य अक्ष भी ज्ञात कीजिए। 9

(ख) बिन्दुओं (1, 1, 1), (1, 1, 0) और (2, 2, 1) से निर्धारित समतल का समीकरण निकालिए। यह भी जाँच कीजिए कि (2, 1, 1) उस समतल पर स्थित है। 3

(ग) एक समुच्चय का सहसमुच्चय परिभाषित कीजिए। मान लीजिए :

$$W = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\} \leq \mathbf{R}^3$$

जाँच कीजिए कि सदिश (3, 1, 2) और (1, 1, 3) W के एक ही सहसमुच्चय में हैं या नहीं। 3

7. (क) मान लीजिए $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ $\mathbf{R}^3$ का क्रमित आधार है, जहाँ $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 2, 3)$ और $u_3 = (4, 3, 4)$। B पर ग्राम-श्मिट लांबिकोकरण विधि का प्रयोग करके $\mathbf{R}^3$ का प्रसामान्य लांबिक आधार प्राप्त कीजिए। 5

(ख) मान लीजिए $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, -2), (-1, -1, 0)\}$ $\mathbf{R}^3$ का एक आधार है। B का द्वैत आधार निकालिए। 5

(ग) जाँच कीजिए कि समुच्चय $S = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbf{R}, a_n \leq 0\}$ $\mathbf{R}^n$ का उपसमुच्चय है या नहीं। 3

(घ) यदि v_1, v_2, v_3 पर एक सदिश समष्टि में रैखिकतः स्वतन्त्र सदिश हैं, तो दिखाइये कि $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1$ भी रैखिकतः स्वतन्त्र हैं। 2

8. निम्नलिखित कथनों में से कौन–से कथन सत्य और कौन–से असत्य हैं ? अपने उत्तर की लघु उपपत्ति या प्रति–उदाहरण द्वारा पुष्टि कीजिए : 5×2=10

(क) एक सममित आव्यूह के आइगेन मान वास्तविक होते हैं।

(ख) यदि $S_1 \subseteq S_2$ एक सदिश समष्टि V के उपसमुच्चय हैं और S_2 रैखिकतः स्वतन्त्र है, तो S_1 भी रैखिकतः स्वतन्त्र है।

(ग) कोई भी रैखिक रूपान्तरण $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5$ के लिए अष्टि $(T) \neq \{0\}$।

(घ) कोई भी ऐकिक आव्यूह हर्मिटीय है।

(ङ) एक ऐसा रैखिक संकारक $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ है जिसका अभिलाक्षणिक बहुपद $(x-3)^2(x-5)(x-1)$ है और न्यूनतम बहुपद $(x-3)(x-5)$ है।