No. of Printed Pages : 16 **BMTC–134**

BACHELOR OF ARTS/BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL) (BAG/BSCG)

Term-End Examination

December, 2023

BMTC-134 : ALGEBRA

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : (*i*) *There are eight questions in this paper.*

(*ii*) *The* ***eighth*** *question is compulsory.*

(*iii*) *Do any* ***six*** *questions from Question No.* ***1*** *to Question No.* ***7****.*

(*iv*) *Use of calculator is not allowed.*

(*v*) *Do your rough work in a clearly identifiable part of the bottom of the same page or in the side of the page only.*

---

1. (a) Let R be the relation defined on $\mathbb{Z}$ by $a\text{R}b$ if ab is an odd integer. Which of the properties for an equivalence relation hold for R and which properties do not hold ? Justify your answer. 3

(b) Define a subgroup of a group. Check whether :

$$\text{H} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

is a subgroup of the group of 2×3 matrices over $\mathbb{C}$ under addition. 2

(c) State Lagrange's theorem. What are the possible orders of subgroups of a group of order 15 ? 2

(d) Define a unit in a ring with identity. Give an example of a ring with identity R and a unit element in R. 2

(e) Let $S = \{-2, -1, 1, 2\}$ and $*$ be the binary operation defined by $a * b = -a$. Compute the Cayley table for $(S, *)$. Is $*$ commutative ? Is $*$ associative ? Justify your answer. 6

2. (a) Let A be a 4×3 real matrix, B be a 3×5 real matrix and C be a 4×5 real matrix. Which of the following operations are defined ?

(i) $AB - C$

(ii) $BA + C^t$

For those operations that are defined, what is the order of the resulting matrix ? 3

(b) Let $\alpha = (1\ 4\ 5)$, $\beta = (1\ 2\ 4\ 3) \in S_5$. Compute $\sigma = \alpha.\beta^{-1}$. Write σ as a product of transpositions. What is the signature of σ ? 3

(c) If F is a field, show that $U(F[x]) = F^*$. 4

(d) Let $R = \mathbb{Z}_{18}$: 5

(i) Give, with justification, a nilpotent element in R.

(ii) Give, with justification, a zero divisor in R which is not nilpotent.

(iii) What is the order of U(R) ?

3. (a) Show that, if G is a finite group such that $o(G)$ is neither one nor a prime, then G has a proper subgroup. 5

(b) Define a prime ideal. Give a prime ideal in $\mathbb{Z}$. 2

(c) Calculate the following : 3

(i) $\left(\bar{3}x^3+\bar{2}x^2+\bar{5}x+\bar{3}\right)+\left(\bar{6}x^3+\bar{2}x^2+\bar{4}x+\bar{5}\right)$ in $\mathbb{Z}_7[x]$

(ii) $\left(\bar{5}x^2+\bar{5}x+\bar{6}\right)\cdot\left(\bar{3}x^3+\bar{4}x+\bar{6}\right)$ in $\mathbb{Z}_{11}[x]$

(d) Let G be a group of prime order. Show that G has no proper non-trivial subgroup. Further, show that G is cyclic. Further, check whether or not all the subgroups of a group of order 15 is cyclic. 5

4. (a) Find $t,\ s \in \mathbb{Z}$ such that : 5

$$(t)105 + (s)40 = (105, 40)\ .$$

(b) If H and K are normal abelian sub-groups of a group, and if $\mathrm{H} \cap \mathrm{K} = \{e\}$, show that HK is abelian. Will the result be still true if we remove the condition that $\mathrm{H} \cap \mathrm{K} = \{e\}$? 6

(c) In each of the following cases, check whether or not S is a subring of R : 4

(i) $\mathrm{S} = \left\{ \dfrac{a}{2^r} \middle| a, r \in \mathbb{Z} \right\}, \mathrm{R} = \mathbb{Q}$

(ii) $\mathrm{S} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}, \mathrm{R} = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$

5. (a) Let R be the ring $(\wp(X), \Delta, \cap)$, $S = (\wp(Y), \Delta, \cap)$, where X is a non-empty set with a proper non-empty subset Y. Let $\phi : R \to S$ be defined by $\phi(A) = A \cap Y$ for all $A \subset X$. Prove that ϕ is a ring homomorphism. What is the kernel of ϕ ? 6

(b) Let F be a field and let $f(x) \in F[x]$ be irreducible in $F[x]$. Show that the ideal $\langle f(x) \rangle$ is a maximal ideal in $F[x]$. Use this to deduce that $\mathbb{Q}[x] / \langle x^5 + 6x^3 + 18 \rangle$ is a field. 7

(c) Define a normal subgroup. Give a normal subgroup of S_5. 2

6. (a) Find the order of each of the elements in U(9). Is U(9) cyclic ? Justify your answer. 5

(b) Check whether or not $\langle \bar{7} \rangle$ is a maximal ideal in $\mathbb{Z}_{35}$. 3

(c) Show that $6 \mid o(A_4)$, but A_4 doesn't have a subgroup of order 6. 7

7. (a) Let $S^1 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$ and $U = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^n = 1$ for some $n \in \mathbb{N}\}$. Check that U is a group. Is U a proper subgroup of S′ ? Justify your answer. 3

(b) Let R be a ring (not necessarily commutative) and I and J be ideals of R. Show that $I \cap J$ and $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ are ideals of R. 5

(c) Show that $\langle x, 7 \rangle$ is not a principal ideal in $\mathbb{Z}[x]$. 7

8. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with a short proof or a counter-example : 10

(a) The signature of every odd permuation is –1.

(b) Every group of order eight is abelian.

(c) The ring $\mathbb{Z}_2[x]$ has infinitely many elements.

(d) In a non-commutative ring, product of two units is a unit.

(e) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ is a field of six elements.

BMTC–134

कला स्नातक / विज्ञान स्नातक (सामान्य)

(बी.ए.जी./बी.एस.सी.जी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

बी.एम.टी.सी.-134 : बीजगणित

समय : 3 घण्टे अधिकतम अंक : 100

नोट : *(i)* *इस प्रश्न पत्र में आठ प्रश्न हैं।*

(ii) ***आठवाँ*** *प्रश्न करना अनिवार्य है।*

(iii) *प्रश्न संख्या* ***1*** *से* ***7*** *तक कोई भी* ***छः*** *प्रश्न कीजिए।*

(iv) *कैलकुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है।*

(v) *रफ कार्य उसी पेज के नीचे स्पष्ट रूप से दर्शित भाग में या पेज के बगल में करें।*

---

1. (क) मान लीजिए $\mathbb{Z}$ पर सम्बन्ध R $a\text{R}b$ यदि ab विषम है, द्वारा परिभाषित है। R तुल्यता सम्बन्ध के लिए जरूरत कौन-से गुणों को सन्तुष्ट करता है और कौन-से गुणों को सन्तुष्ट नहीं करता ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(ख) एक समूह का उपसमूह परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि :

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

योग के सापेक्ष $\mathbb{C}$ पर 2×3 आव्यूहों क समूह का उपसमूह है। 2

(ग) लैग्रांज प्रमेय बताइए। एक कोटि 15 वाल समूह की उपसमूहों की कोटि क्या हो सकती है ? 2

(घ) एक तत्समकी वलय में मात्रक परिभाषित कीजिए। एक तत्समकी वलय R और R में एक मात्रक का उदाहरण दीजिए। 2

(ङ) मान लीजिए $S = \{-2, -1, 1, 2\}$ और द्विआधारी संक्रिया *, $a * b = -a$ द्वारा परिभाषित है। (S, *) को कैली सारणी बनाइए। क्या * क्रमविनिमेय है ? क्या * साहचर्य है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 6

2. (क) मान लीजिए A एक 4×3 वास्तविक आव्यूह है, B एक 3×5 वास्तविक आव्यूह है और C एक 4×5 वास्तविक आव्यूह है। निम्नलिखित में से कौन-सी संक्रियाएँ साध्य हैं ?

(i) $AB - C$

(ii) $BA + C^t$

जो संक्रियाएँ परिभाषित हैं उनमें प्राप्त आव्यूह की कोटि क्या होगी ? 3

(ख) मान लीजिए $\alpha = (1\ 4\ 5), \beta = (1\ 2\ 4\ 3) \in S_5$. $\sigma = \alpha . \beta^{-1}$ परिकलित कीजिए। σ को पक्षान्तरण के गुणनफल के रूप में लिखिए। σ की चिन्हक क्या है ? 3

(ग) यदि F एक क्षेत्र है, तो दिखाइए कि $U(F[x]) = F^*$. 4

(घ) मान लीजिए $R = \mathbb{Z}_{18}$: 5

(i) पुष्टि के साथ R में एक शून्यभावी अवयव दीजिए।

(ii) पुष्टि के साथ R में एक शून्य का भागक दीजिए जो शून्यभावी न हो।

(iii) U(R) की कोटि क्या है ?

3. (क) दिखाइए कि, यदि G एक परिमित समूह है जिसके लिए $o(G)$ न तो एक न ही अभाज्य है, तब G का एक उचित उपसमूह होगी। 5

(ख) अभाज्य गुणजावली को परिभाषित कीजिए। $\mathbb{Z}$ में एक अभाज्य गुणजावली दीजिए। 2

(ग) निम्नलिखित को परिकलित कीजिए : 3

(i) $\mathbb{Z}_7[x]$ में

$$\left(\bar{3}x^3+\bar{2}x^2+\bar{5}x+\bar{3}\right)+\left(\bar{6}x^3+\bar{2}x^2+\bar{4}x+\bar{5}\right)$$

(ii) $\mathbb{Z}_{11}[x]$ में $\left(\bar{5}x^2+\bar{5}x+\bar{6}\right)\cdot\left(\bar{3}x^3+\bar{4}x+\bar{6}\right)$

(घ) मान लीजिए G एक अभाज्य कोटि वाला समूह है। दिखाइए कि G का कोई उचित उतुच्छ उपसमूह नहीं है। आगे, दिखाइए कि G चक्रीय है। यह भी जाँच कीजिए कि कोटि 15 वाल एक समूह का प्रत्येक उपसमूह चक्रीय है। 5

4. (क) $t, \; s \in \mathbb{Z}$ निकालिए जिसके लिए : 5

$$(t)105 + (s)40 = (105, 40) \text{ ।}$$

(ख) यदि H और K एक समूह के प्रसामान्य आबेली उपसमूह हैं और $\mathrm{H} \cap \mathrm{K} = \{e\}$, तो दिखाइए कि HK आबेली है। क्या यह निष्कर्ष प्रतिबन्ध, $\mathrm{H} \cap \mathrm{K} = \{e\}$ हटाने पर भी सत्य होगा ? 6

(ग) निम्नलिखित प्रत्येक स्थिति में जाँच कीजिए कि S वलय R की उपवलय है या नहीं : 4

(i) $\mathrm{S} = \left\{ \dfrac{a}{2^r} \middle| \, a, r \in \mathbb{Z} \right\}, \mathrm{R} = \mathbb{Q}$

(ii) $\mathrm{S} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}, \mathrm{R} = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$

5. (क) मान लीजिए वलय $R = (\wp(X), \Delta, \cap)$, $S = (\wp(Y), \Delta, \cap)$, जहाँ X अरिक्त समुच्चय है और Y, X का अरिक्त उपसमुच्चय है। मान लीजिए $\phi : R \to S$ सभी $A \subset X$ के लिए $\phi(A) = A \cap Y$ द्वारा परिभाषित है। दिखाइए कि ϕ एक वलय समाकारिता है। ϕ की अष्टि क्या है ? 6

(ख) मान लीजिए F एक क्षेत्र है और $f(x) \in F[x]$ $F(x)$ में अखंडनीय है। दिखाइए कि $\langle f(x) \rangle$, $F(x)$ में एक उच्चिष्ठ गुणजावली है। इसका प्रयोग करके दिखाइए कि $\mathbb{Q}[x]/\langle x^5 + 6x^3 + 18 \rangle$ एक क्षेत्र है।7

(ग) एक प्रसामान्य उपसमूह को परिभाषित कीजिए। S_5 का एक प्रसामान्य उपसमूह दीजिए। 2

6. (क) U(9) में प्रत्येक अवयव की कोटि निकालिए। क्या U(9) चक्रीय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

(ख) जाँच कीजिए कि $\langle \bar{7} \rangle$ $\mathbb{Z}_{35}$ की उच्चिष्ठ गुणजावली है या नहीं। 3

(ग) दिखाइए कि $6 \mid o(A_4)$ परन्तु A_4 की कोटि 6 वाला कोई भी उपसमूह नहीं है। 7

7. (क) मान लीजिए $S^1 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$ और $U = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^n = 1 \quad n \in \mathbb{N}\}$, जाँच कीजिए कि U एक समूह है। क्या U, S' का उचित उपसमूह है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(ख) मान लीजिए R एक वलय है। (क्रमविनिमेय होना जरूरी नहीं है।) मान लीजिए I और J, R की गुणजावलियाँ हैं। दिखाइए कि $I \cap J$ और $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ R की गुणजावलियाँ हैं। 5

(ग) दिखाइए कि $\langle x, 7 \rangle$ $\mathbb{Z}[x]$ में मुख्य गुणजावली नहीं है। 7

8. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि एक लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण द्वारा कीजिए : 10

(क) प्रत्येक विषम क्रमचय का चिह्नक -1 होता है।

(ख) कोटि 8 वाला प्रत्येक समूह आबेली है।

(ग) वलय $\mathbb{Z}_2[x]$ में अन्ततः अनेक अवयव हैं।

(घ) एक अक्रमविनिमेय वलय में दो मात्रक का गुणनफल मात्रक होता है।

(ङ) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ 6 अवयवों वाला क्षेत्र है।