

No. of Printed Pages : 12

BMTC–131

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP) (BSCG/BAG)**

Term-End Examination

December, 2023

BMTC-131 : CALCULUS

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 100

Note : (i) *Question No. 1 is compulsory.*

(ii) *Attempt any **six** questions from
Q. No. 2 to Q. No. 8.*

(iii) *Use of calculator is not allowed.*

1. Which of the following statements are true or false ? Give reasons for your answers in the form of a short proof or a counter-example, whichever is appropriate : $5 \times 2 = 10$

(i) If f and g are functions on \mathbf{R} defined by
 $f(x) = 3x - 4$ and $g(x) = 2|x - 3|$, then
 $(g \circ f)(2) = -2$.

P. T. O.

- (ii) The function f , defined by $f(x) = |x - 5|$ is differentiable in $[0, 3]$.
- (iii) The set $]-\infty, 15] \cap]5, \infty[$ is an open interval.
- (iv) If $Z = a + ib \in \mathbf{C}$ such that $\frac{a}{b} = -1$, then Z lies in the second quadrant of the Argand plane.
- (v) Every integrable function is continuous.
2. (a) Give an example of a relation, if it exists, which is neither reflexive, nor symmetric, nor transitive. 3
- (b) Find all the cube roots of $8i$ and represent them in Argand plane. 6
- (c) If :

$$I_n = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos^n x \, dx, \quad (n \geq 2)$$

find an equation relating I_n and I_{n-2} . 6

3. (a) Find the maximum and the minimum values of the function $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}$ defined by $f(x) = 5 \cos x + 12 \sin x$. 6

(b) Express :

$$\frac{x(x+4)}{x^3+x^2+5x+5}$$

as a sum of partial fractions. 6

(c) For which value of k , is the function f defined below continuous at $x = 2$? 3

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx, & \text{for } 1 \leq x < 2 \\ \frac{x^2}{4} - 4, & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$

4. (a) Prove or disprove the following : 3

“There exists an injective function from \mathbf{N} to \mathbf{N} , which is not surjective.”

(b) Evaluate : 6

$$\int \sqrt{1 + \sqrt{x}} \, dx$$

(c) By considering the function f defined by $f(x) = (x-2)\ln x$, over $[1, 2]$, show that the equation, $x(1 + \ln x) = 2$ is satisfied by at least one value of x , which lies in the interval $] 1, 2 [$. 6

5. (a) Prove that the curves :

$$x^2 + 2xy - y^2 + 2ax = 0$$

$$\text{and } 3y^3 - 2a^2x - 4a^2y + a^3 = 0,$$

intersect at an angle $\tan^{-1}\left(\frac{9}{8}\right)$ at the point $(a, -a)$. 4

- (b) Solve the equation :

$$x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$$

given that it has two roots, which are equal in magnitude, but opposite in sign. 6

- (c) A manufacture's cost function is :

$$\frac{dC}{dx} = \frac{500x}{\sqrt{x^2 + 40}},$$

where x is the number of units of a product in hundreds. If C is the cost in rupees, find the cost involved to increase production from 300 to 900 units. 5

6. (a) Is the function $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ defined by $f(x) = x|x|$, differentiable at $x = 0$? Justify your answer. 5

(b) Trace the curve :

$$y^2 = x^2(x+1)$$

by stating all the properties used to trace it. 10

7. (a) Find the entire length of the cardioid

$$r = a(1 - \cos \theta). \quad 8$$

(b) If :

$$I_n = \int_0^\pi \frac{1 - \cos nx}{1 - \cos x} dx, \quad n \geq 0,$$

then show that $I_{n+2} + I_n = 2 I_{n+1}$.

Hence show that : 7

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 n\theta}{\sin^2 \theta} d\theta = \frac{n\pi}{2}.$$

8. (a) Find all the maximum and minimum values of the function f given by : 8

$$f(x) = \int_1^x \left[2(t-1)(t-2)^3 + 3(t-1)^2(t-2)^2 \right] dt$$

(b) If :

$$y = a \cos(\ln x) + b \sin(\ln x),$$

then find the value of
 $x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1}$ in terms of y_n ,
where y_n is the n th derivative of y
w. r. t. x . 7

BMTC-131

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.) (बी.एस.सी.जी./बी.ए.जी.)
सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

बी.एम.टी.सी.-131 : कलन

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 100

नोट : (i) प्रश्न सं. 1 करना अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न सं 2 से 8 में से कोई छः प्रश्न कीजिए।

(iii) कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं? अपने उत्तर के पक्ष में एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रतिउदाहरण दीजिए : $5 \times 2 = 10$

(i) यदि f और g , \mathbf{R} पर $f(x) = 3x - 4$ और $g(x) = 2|x - 3|$ द्वारा परिभाषित हैं, तो $(g \circ f)(2) = -2$ ।

(ii) $f(x) = |x-5|$ द्वारा परिभाषित फलन $f[0,3]$ में अवकलनीय है।

(iii) समुच्चय $]-\infty,15] \cap]5,\infty[$ एक विवृत अंतराल है।

(iv) यदि $Z = a+ib \in \mathbf{C}$ इस प्रकार है कि $\frac{a}{b} = -1$ है, तो Z आरगां समतल के द्वितीय चतुर्थांक में स्थित है।

(v) प्रत्येक समाकलनीय फलन सतत् होता है।

2. (क) ऐसे एक संबंध का, यदि अस्तित्व है, उदाहरण दीजिए जो न तो स्वतुल्य न ही सममित और न ही संक्रामक है। 3

(ख) $8i$ के सभी घनमूल ज्ञात कीजिए और उन्हें आरगां समतल पर दर्शाइए। 6

(ग) यदि :

$$I_n = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos^n x \, dx, \quad (n \geq 2)$$

है, तो I_n और I_{n-2} में एक समीकरण ज्ञात कीजिए। 6

3. (क) $f(x) = 5 \cos x + 12 \sin x$ द्वारा परिभाषित फलन $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}$ के अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। 6

(ख) $\frac{x(x+4)}{x^3 + x^2 + 5x + 5}$ को आंशिक भिन्नों के योग में व्यक्त कीजिए। 6

$$(ग) f(x) = \begin{cases} 3 - kx, & 1 \leq x < 2 \text{ के लिए} \\ \frac{x^2}{4} - 4, & x \geq 2 \text{ के लिए} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f k के किस मान के लिए $x = 2$ पर सतत् है ? 3

4. (क) निम्नलिखित को सिद्ध या असिद्ध कीजिए : 3

“ \mathbf{N} से \mathbf{N} पर एक एकैकी फलन का अस्तित्व है, जो आच्छादक नहीं है।”

(ख) $\int \sqrt{1+\sqrt{x}} \, dx$ ज्ञात कीजिए। 6

(ग) $f(x) = (x-2)\ln x$ द्वारा परिभाषित फलन f लीजिए और दर्शाइए कि समीकरण $x(1+\ln x) = 2, x$ के कम से कम एक ऐसे मान से जो अंतराल $]1, 2[$ में है, संतुष्ट होती है। 6

5. (क) दर्शाइए कि वक्र $x^2 + 2xy - y^2 + 2ax = 0$ और $3y^3 - 2a^2x - 4a^2y + a^3 = 0$ बिन्दु $(a, -a)$ पर कोण $\tan^{-1}\left(\frac{9}{8}\right)$ से प्रतिच्छेद करते हैं। 4

(ख) समीकरण $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$ हल कीजिए। दिया गया है कि इसके दो मूल परिमाण में समान और चिह्नों में विपरीत हैं। 6

(ग) एक निर्माता का लागत फलन $\frac{dC}{dx} = \frac{500x}{\sqrt{x^2 + 40}}$ है, जहाँ x उत्पाद की इकाई सैकड़ों में है। यदि C रूपयों में है, तो उत्पादन को 300 से 900 इकाइयों तक बढ़ाने में लगी लागत ज्ञात कीजिए। 5

6. (क) क्या $f(x) = x|x|$ द्वारा परिभाषित फलन

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x = 0$ पर अवकलनीय है ? अपने

उत्तर को स्पष्ट कीजिए। 5

(ख) $y^2 = x^2(x+1)$ को आरेखित कीजिए और ऐसा

करने के लिए प्रयोग किए गये गुणधर्मों का

लिखिए। 10

7. (क) हृदयाभ $r = a(1 - \cos \theta)$ की पूरी लम्बाई ज्ञात

कीजिए। 8

(ख) यदि $I_n = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos nx}{1 - \cos x} dx$, $n \geq 0$ है, तो दर्शाइए

कि $I_{n+2} + I_n = 2I_{n+1}$ । इस प्रकार दर्शाइए

कि : 7

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 n\theta}{\sin^2 \theta} d\theta = \frac{n\pi}{2}।$$

8. (क) $f(x) = \int_1^x [2(t-1)(t-2)^3 + 3(t-1)^2(t-2)^2] dt$

द्वारा परिभाषित फलन के सभी अधिकतम और
न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। 8

(ख) यदि $y = a \cos(\ln x) + b \sin(\ln x)$ है, तो

$x^2 y_{n+2} + (2n+1)x y_{n+1}$ का मान y_n के पद
में ज्ञात कीजिए, जहाँ y_n, y का x के सापेक्ष
 n वाँ अवकलज है। 7