PHE-14

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

December, 2022

PHYSICS

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-III

Time : 2 hours | *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt **all** questions. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.*

1. Attempt any ***five*** parts : *5×2=10*

(a) Show that the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3i \\ 3i & 0 \end{bmatrix}$$

is skew-hermitian matrix.

(b) Show that acceleration is a contravariant vector.

(c) Locate and name the singularity of the following function in the finite z-plane :

$$\frac{ln\,(z+2i)}{z^2}$$

(d) Calculate the residue of the function $\dfrac{e^z}{(z-2)^2}$.

(e) Obtain the Fourier transform of the function :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\beta t} & t \geq 0,\ \beta > 0 \end{cases}$$

(f) Obtain the Laplace transform of the function $f(t) = e^{at}$, where a is a non-zero constant.

(g) Using the following orthogonality relation for Legendre's polynomials

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \frac{2}{(2n+1)}\, \delta_{mn},$$ show that

$$\int_{-1}^{+1} x\, P_n(x)\, dx = \frac{2}{3} \text{ for } n = 1,$$

and zero otherwise.

(h) The Rodrigues' formula for the Hermite polynomials is given by :

$$H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right).$$

Using this formula, evaluate $H_2(x)$.

2. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) Verify the Cayley-Hamilton theorem for the matrix

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$ *5*

(b) If a real matrix is both symmetric and orthogonal, show that its eigenvalues can only be + 1 or – 1. *5*

(c) Write four properties satisfied by a group. Does the set of all non-singular square matrices of order n form a group under matrix multiplication ? Explain your answer. *2+3*

3. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) Using Cauchy's integral formula, calculate g(2) if C is a circle $|z| = \pi$ described in the positive sense and

$$g(z_0) = \oint \frac{(3z^2 - 4)}{(z - z_0)}\, dz.$$ *5*

(b) Obtain the Taylor series expansion of $\cos^2 z$ about $z = 0$. *5*

(c) Using the method of residues, evaluate the integral $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2\theta}$. *5*

4. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) Obtain Fourier sine transform of the function

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi/2 \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$ *5*

(b) Solve the initial value problem using the method of Laplace transform : *5*

$$y'' - 2y' - 3y = 0; \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 7$$

(c) Obtain the inverse Laplace transform of

$$F(x) = \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x}.$$ *5*

5. Attempt any ***one*** part : *1×10=10*

(a) Using the generating relation for Legendre polynomials

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n,$$

obtain the recurrence relation :

$$(2n + 1)\, x\, P_n(x) = (n + 1)\, P_{n+1}(x) + n\, P_{n-1}(x).$$

If $P_0(x) = 1$ and $P_1(x) = x$, find $P_2(x)$. *7+3*

(b) The differential equations satisfied by Laguerre polynomials of degrees n and k are :

$$x \frac{d^2 L_n}{dx^2} + (1 - x) \frac{dL_n}{dx} + nL_n(x) = 0$$

$$x \frac{d^2 L_k}{dx^2} + (1 - x) \frac{dL_k}{dx} + kL_k(x) = 0$$

Using these equations, show that the orthonormality relation for Laguerre polynomials is : *10*

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_k(x) \, dx = \delta_{nk}$$

पी.एच.ई.-14

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2022

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : ***सभी*** *प्रश्न कीजिए । प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।*

1. कोई ***पाँच*** भाग कीजिए : *5×2=10*

(क) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3i \\ 3i & 0 \end{bmatrix}$$

विषम-हर्मिटीय आव्यूह है ।

(ख) सिद्ध कीजिए कि त्वरण प्रतिपरिवर्ती सदिश है ।

(ग) परिमित z-तल में निम्नलिखित फलन की विचित्रता ज्ञात कीजिए और उसका नाम बताइए :

$$\frac{ln\,(z + 2i)}{z^2}$$

(घ) फलन $\dfrac{e^z}{(z-2)^2}$ का अवशिष्ट परिकलित कीजिए ।

(ङ) निम्नलिखित फलन का फूरिये रूपांतर प्राप्त कीजिए :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\beta t} & t \geq 0, \beta > 0 \end{cases}$$

(च) फलन $f(t) = e^{at}$ का लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए, जहाँ a एक परिमित अचर है और $a \neq 0$ है ।

(छ) लेजान्ड्रे बहुपदों के लिए निम्नलिखित लांबिकता संबंध का उपयोग कीजिए :

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \frac{2}{(2n+1)}\, \delta_{mn},$$

और सिद्ध कीजिए कि

$$\int_{-1}^{+1} x\, P_n(x)\, dx = \frac{2}{3},$$ $n = 1$ के लिए और अन्यथा शून्य है ।

(ज) हर्मिट बहुपदों के लिए रोड्रिगेज़ सूत्र है :

$$H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

इस सूत्र का उपयोग करके, $H_2(x)$ की गणना कीजिए ।

2. कोई ***दो*** भाग कीजिए : *2×5=10*

(क) आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय की पुष्टि कीजिए । *5*

(ख) यदि एक वास्तविक आव्यूह सममित और लांबिक दोनों ही हो, तो सिद्ध कीजिए कि इसके आइगेनमान केवल $+1$ या -1 ही हो सकते हैं । *5*

(ग) एक समूह द्वारा संतुष्ट किए जाने वाले चार गुणधर्म लिखिए । क्या आव्यूह गुणन के अधीन कोटि n वाले सभी व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूहों का समुच्चय, समूह होता है ? अपने उत्तर स्पष्ट कीजिए । *2+3*

3. कोई ***दो*** भाग कीजिए : *2×5=10*

(क) कौशी समाकल सूत्र का उपयोग करके, $g(2)$ की गणना कीजिए, यदि C धन दिशा में वर्णित वृत्त $|z| = \pi$ है और

$$g(z_0) = \oint \frac{(3z^2 - 4)}{(z - z_0)}\, dz.$$ *5*

(ख) $z = 0$ के प्रति $\cos^2 z$ का टेलर श्रेणी प्रसार प्राप्त कीजिए । *5*

(ग) अवशिष्ट विधि का उपयोग करके, समाकल

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2\theta}$$ परिकलित कीजिए । *5*

4. कोई ***दो*** भाग कीजिए : *2×5=10*

(क) फलन

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi/2 \\ 0, & x > \pi/2 \end{cases}$$

का फूरिये साइन रूपांतर प्राप्त कीजिए । *5*

(ख) लाप्लास रूपांतर विधि का उपयोग करके निम्नलिखित आदि-मान समस्या को हल कीजिए :

$$y'' - 2y' - 3y = 0; \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 7$$ *5*

(ग) $F(x) = \dfrac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए । *5*

5. कोई ***एक*** भाग कीजिए : *1×10=10*

(क) लेजान्ड्रे बहुपदों के लिए जनक संबंध

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n ,$$

का उपयोग करके निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध प्राप्त कीजिए :

$$(2n + 1)\, x\, P_n(x) = (n + 1)\, P_{n+1}(x) + n\, P_{n-1}(x).$$

यदि $P_0(x) = 1$ और $P_1(x) = x$ है, तो $P_2(x)$ ज्ञात कीजिए । *7+3*

(ख) घात n और k वाले लागेर बहुपदों द्वारा संतुष्ट अवकल समीकरण हैं :

$$x \frac{d^2L_n}{dx^2} + (1 - x) \frac{dL_n}{dx} + nL_n(x) = 0$$

$$x \frac{d^2L_k}{dx^2} + (1 - x) \frac{dL_k}{dx} + kL_k(x) = 0$$

इन समीकरणों का उपयोग करके, सिद्ध कीजिए कि लागेर बहुपदों का लांबिकता संबंध है : *10*

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_k(x) \, dx = \delta_{nk}$$