

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

MTE-04 : ELEMENTARY ALGEBRA

&

MTE-05 : ANALYTICAL GEOMETRY

Instructions :

1. *Students registered for both MTE-04 & MTE-05 courses should answer both the question papers in two separate answer books entering their enrolment number, course code and course title clearly on both the answer-books.*
2. *Students who have registered for MTE-04 or MTE-05 should answer the relevant question paper after entering their enrolment number, course code and course title on the answer-book.*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

एम.टी.ई.-04 : प्रारंभिक बीजगणित

एवं

एम.टी.ई.-05 : वैश्लेषिक ज्यामिति

निर्देश :

1. जो छात्र एम.टी.ई.-04 और एम.टी.ई.-05 दोनों पाठ्यक्रमों के लिए पंजीकृत हैं, दोनों प्रश्न-पत्रों के उत्तर अलग-अलग उत्तर-पुस्तिकाओं में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ़-साफ़ लिखकर दें ।
2. जो छात्र एम.टी.ई.-04 या एम.टी.ई.-05 किसी एक के लिए पंजीकृत हैं, अपने उसी प्रश्न-पत्र के उत्तर उत्तर-पुस्तिका में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ़-साफ़ लिखकर दें ।

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME**(BDP)****Term-End Examination****December, 2022****ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS****MTE-04 : ELEMENTARY ALGEBRA***Time : $1\frac{1}{2}$ hours**Maximum Marks : 25**(Weightage : 70%)*

Note : Question no. 5 is **compulsory**. Attempt any **three** questions from questions no. 1 to 4. Use of calculators is **not** allowed.

1. (a) Let $1, \omega, \omega^2$ be the cube roots of unity. Show that $(1 - \omega + \omega^2)(1 + \omega - \omega^2) = 4$. 2
- (b) If sum of the lengths of the sides of a triangle is given, prove that the area is greatest when the triangle is equilateral. 3
2. (a) Obtain the eighth roots of $-\sqrt{3} - i$. 2
- (b) Let A, B and C be subsets of a set X. Prove that $(B \setminus A) \cup (C \setminus A) = (B \cup C) \setminus A$. 3

3. (a) A concert hall has 400 seats. These seats are divided into two sections A and B. The cost of a ticket in section A is ₹ 155 and that in section B is ₹ 105. Assuming that all the seats are occupied, determine the number of seats allocated to each section so as to get a daily revenue of ₹ 50,000. 3

- (b) Let $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \text{ is a multiple of } 3\}$ and

$$B = \mathbf{Q} \cap \{-5, -4, -3, \dots, 8, 9, 10\}.$$

Represent B by the listing method and $(\mathbf{N} \setminus B) \cap A$ by property method. 2

4. (a) Can the following system of equations be solved by Cramer's rule ? If yes, apply the Cramer's rule to solve it. Otherwise solve the system of equations by Gauss' Elimination method : 3

$$x - 3y + 2z = 7$$

$$x - y + z = 4$$

$$x - 5 = y - 2z$$

- (b) If $z = -1 + i$, then find $\text{Arg} \left(\frac{1}{z} \right)$. 2

5. Which of the following statements are *True* and which are *False* ? Justify your answers with a short proof or a counter-example, wherever appropriate.

10

- (a) If A is an $n \times n$ real matrix, then $|A| = |A^{-1}|$.
- (b) Every polynomial of degree n with real coefficients has at least n real roots.
- (c) If A and B are subsets of a universal set X , then we must have $|A \times B| = |B \times A|$, where $|A|$ denotes number of elements in A .
- (d) Let $Z \in \mathbf{C}$, $Z \neq 0$, then Z/\bar{Z} is always real.
- (e) Any set of two linear equations in two variables has a unique solution.
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2022

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-04 : प्रारंभिक बीजगणित

समय : $1\frac{1}{2}$ घण्टे

अधिकतम अंक : 25
(कुल का : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 5 अनिवार्य है । प्रश्न सं. 1 से 4 में से किन्हीं तीन प्रश्नों को हल कीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।

1. (क) मान लीजिए $1, \omega, \omega^2$ इकाई के घनमूल हैं । दिखाइए कि $(1 - \omega + \omega^2)(1 + \omega - \omega^2) = 4$. 2
- (ख) यदि किसी त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाइयों का योगफल दिया गया हो, तो सिद्ध कीजिए कि उसका क्षेत्रफल तब अधिकतम होगा जब वह एक समबाहु त्रिभुज हो । 3
2. (क) $-\sqrt{3} - i$ के आठवें मूल प्राप्त कीजिए । 2
- (ख) मान लीजिए A, B और C समुच्चय X के उपसमुच्चय हैं । सिद्ध कीजिए कि $(B \setminus A) \cup (C \setminus A) = (B \cup C) \setminus A$. 3

3. (क) किसी संगीत-समारोह के हॉल में 400 सीटें हैं। ये सीटें दो भागों A और B में विभाजित की गई हैं। भाग A में टिकट की लागत ₹ 155 है तथा भाग B में यह लागत ₹ 105 है। यह मानते हुए कि सभी सीटें भरी हुई हैं, ₹ 50,000 की दैनिक आय प्राप्त करने के लिए, प्रत्येक भाग में आबंटित सीटों की संख्या निर्धारित कीजिए। 3

(ख) मान लीजिए

$$A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x, 3 \text{ का गुणज है}\} \text{ और}$$

$$B = \mathbf{Q} \cap \{-5, -4, -3, \dots, 8, 9, 10\}.$$

B को सूची विधि से और $(\mathbf{N} \setminus B) \cap A$ को गुण विधि से निरूपित कीजिए। 2

4. (क) क्या निम्नलिखित समीकरण निकाय को क्रैमर नियम से हल किया जा सकता है? यदि हाँ, तो क्रैमर नियम का प्रयोग करके हल कीजिए। अन्यथा गाउसीय निराकरण विधि से समीकरण निकाय को हल कीजिए : 3

$$x - 3y + 2z = 7$$

$$x - y + z = 4$$

$$x - 5 = y - 2z$$

(ख) यदि $z = -1 + i$ है, तो $\text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right)$ ज्ञात कीजिए। 2

5. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? जहाँ उपयुक्त हो, एक लघु उपपत्ति या एक प्रत्युदाहरण के साथ अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए । 10

(क) यदि A एक $n \times n$ वास्तविक आव्यूह है, तब $|A| = |A^{-1}|$ होगा ।

(ख) कोटि n और वास्तविक गुणांक वाले प्रत्येक बहुपद के कम-से-कम n वास्तविक मूल होते हैं ।

(ग) यदि A और B एक समष्टीय समुच्चय X के उपसमुच्चय हैं, तो $|A \times B| = |B \times A|$ होगा, जहाँ $|A|$, समुच्चय A के अवयवों की संख्या है ।

(घ) मान लीजिए $Z \in \mathbf{C}$, $Z \neq 0$, तब Z/\bar{Z} हमेशा वास्तविक होगा ।

(ङ) किन्हीं दो चरों वाले दो रैखिक समीकरणों के लिए एक अद्वितीय हल होता है ।

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

**Term-End Examination
December, 2022**

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-05 : ANALYTICAL GEOMETRY**

Time : $1\frac{1}{2}$ hours

Maximum Marks : 25

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 1 is **compulsory**. Answer any **three** questions from questions no. 2 to 5. Use of calculators is **not** allowed.*

1. Which of the following statements are *True* and which are *False* ? Justify your answer. 10
- (a) The equation $r = \cos \theta$ represents a circle in polar coordinates.
- (b) A conic has a unique directrix.
- (c) Every planar section of a hyperboloid is an ellipse.

(d) There exists a unique plane passing through any three given points.

(e) The equation of the line passing through $(4, 0, 0)$ and parallel to the z -axis is $x - 4 = y = z$.

2. (a) Show that the point $(2, 1, 0)$ is equidistant from the line $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1}, z = 0$ and the plane $2x + y = 0$. 3

(b) Find the new equation obtained from

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$$

after shifting the origin to $(-2, 1)$ and then rotating the axes through 45° . 2

3. (a) Find the centre and the radius of the sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 8z - 45 = 0.$$

Hence, determine whether the point $(1, -2, 0)$ lies inside or outside the sphere. 2

(b) Write the equation of a pair of straight lines through the points of intersection of $x^2 + y^2 = 1$ and $x^2 - y^2 + 2xy - 3 = 0$. 3

4. (a) Find the equations of the tangent planes to the conicoid $7x^2 - 3y^2 - z^2 + 21 = 0$ which pass through the line $7x - 6y + 3 = 0, z = 3$. 3

(b) Find the equation of a parabola with focus $(3, -4)$ and directrix $x + y = 2$. 2

5. (a) Reduce the equation

$$25x^2 + 4y^2 - z^2 = 50x + 2z + 12 - 16y$$

to standard form. Hence, identify the object it represents. 3

(b) If L_1 and L_2 are two parallel lines with direction cosines l_1, m_1, n_1 and l_2, m_2, n_2 , respectively, then show that

$$(l_1 - l_2)^2 + (m_1 - m_2)^2 + (n_1 - n_2)^2$$

is a positive constant. 2

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2022

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-05 : वैश्लेषिक ज्यामिति

समय : $1\frac{1}{2}$ घण्टे

अधिकतम अंक : 25

(कुल का : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है । प्रश्न सं. 2 से 5 में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरो के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए । 10

(क) समीकरण $r = \cos \theta$ ध्रुवीय निर्देशांकों में एक वृत्त को निरूपित करता है ।

(ख) एक शांकव की केवल एक ही नियता होती है ।

(ग) एक अतिपरवलयज का प्रत्येक समतल प्रतिच्छेद एक दीर्घवृत्त होता है ।

(घ) किन्हीं तीन दिए हुए बिन्दुओं से केवल एक समतल गुज़रता है ।

(ङ) $(4, 0, 0)$ से गुज़रने वाली और z -अक्ष के समांतर रेखा का समीकरण $x - 4 = y = z$ है ।

2. (क) दिखाइए कि बिन्दु $(2, 1, 0)$ रेखा $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1}$, $z = 0$ और समतल $2x + y = 0$ से समान दूरी पर है । 3

(ख) मूल-बिन्दु को $(-2, 1)$ पर स्थानांतरित करने के बाद अक्षों को 45° से घुमाने पर

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$$

से प्राप्त नया समीकरण ज्ञात कीजिए । 2

3. (क) गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 8z - 45 = 0$ के केंद्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए । इस प्रकार, निर्धारित कीजिए कि बिन्दु $(1, -2, 0)$ इस गोले के अंदर है या बाहर । 2

(ख) $x^2 + y^2 = 1$ और $x^2 - y^2 + 2xy - 3 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुज़रने वाले सरल रेखा युग्म का समीकरण लिखिए । 3

4. (क) शांकवज $7x^2 - 3y^2 - z^2 + 21 = 0$ के उन स्पर्श समतलों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $7x - 6y + 3 = 0, z = 3$ से गुज़रते हैं । 3

(ख) नाभि $(3, -4)$ और नियता $x + y = 2$ वाले परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए । 2

5. (क) समीकरण

$$25x^2 + 4y^2 - z^2 = 50x + 2z + 12 - 16y$$

को मानक रूप में समानीत कीजिए । इस प्रकार,
इसके द्वारा निरूपित आकृति को पहचानिए ।

3

(ख) यदि L_1 और L_2 दो समांतर रेखाएँ हैं जिनकी दिक्कोज्याएँ क्रमशः l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 हैं, तो दिखाइए कि

$$(l_1 - l_2)^2 + (m_1 - m_2)^2 + (n_1 - n_2)^2$$

एक धनात्मक अचर है ।

2