

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)****Term-End Examination  
December, 2022****ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS  
MTE-03 : MATHEMATICAL METHODS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50  
(Weightage : 70%)*

---

**Note :** Question no. 7 is **compulsory**. Attempt any **four** questions from questions no. 1 to 6. Use of calculator is **not** allowed.

---

---

1. (a) Let  $x, y, z$  be in A.P. and their sum is 15. If 1, 3, 9 are added to these three numbers respectively, then they form a G.P. Find  $x, y$  and  $z$ . 4

(b) Consider the normal distribution of weights of the students in a college with mean 55 kg and standard deviation 5 kg. What is the probability that a student weighs

(i) between 60.5 kg and 64.5 kg ?

(ii) more than 65 kg ?

[You may use these values :

$$\phi(1) = 0.8413, \quad \phi(1.1) = 0.8643, \quad \phi(1.9) = 0.9713,$$

$$\phi(2) = 0.9772, \quad \phi(2.1) = 0.9821]$$

6

2. (a) Find the maximum value of  $\frac{\ln x}{x}$ , where

$$0 < x < \infty. \quad 4$$

(b) Consider the set  $X = \{x, y, z, v, w\}$  and let  $A = \{x, y\}$  and  $B = \{y, z, w\}$  be subsets of set  $X$ . Verify the De Morgan's laws for  $A$  and  $B$ . 6

3. (a) Solve the differential equation

$$3e^x \tan y + (1 - e^x) \sec^2 y \frac{dy}{dx} = 0. \quad 4$$

(b) Prove with the help of vectors that the points  $A(1, -2, 3)$ ,  $B(2, 0, 4)$  and  $C(0, 3, 0)$  form a right-angled triangle. 4

(c) Five bags of rice weigh 102 kg each and another eight bags weigh 98 kg each. What is average weight of the 13 bags? 2

4. (a) Let

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3 + 3xy}{x + y}.$$

Show that  $f_{xy} = f_{yx}$ . 4

- (b) Two identical coins are tossed simultaneously 100 times. Two heads appear 30 times, two tails appear 30 times and one head and one tail appears 40 times. Does this result agree with the hypothesis that the tossing is random at 5% level of significance? Justify. 6

[You may use these values :

$$\chi_{1, 0.05}^2 = 3.84, \chi_{2, 0.05}^2 = 5.99, \chi_{3, 0.05}^2 = 7.82]$$

5. (a) Obtain the equation of the sphere having centre on the line  $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-5}$  and passing through the points  $(0, -2, -4)$  and  $(2, -1, -1)$ . 6

- (b) Three boxes have  $B_1$  : 5 Red 5 Black,  $B_2$  : 4 Red 8 Black,  $B_3$  : 3 Red 6 Black balls respectively. One box is chosen at random and a ball is drawn, which is found to be black. Find the probability that the box of  $B_3$  was chosen. 4

6. (a) Find the asymptotes of curve

$$y(x-y)^3 - y(x-y) = 2 \quad 4$$

- (b) The probability of getting no misprint in a page of a book is  $e^{-4}$ . What is the probability that a page contains more than 2 misprints? 3

- (c) Consider a population of five units : A, B, C, D, E. List all the possible samples of size 2 drawn from the above population without replacement. 3

7. Which of the following statements are *True* or *False* ? Give a short proof or a counter example in support of your answer. 5×2=10

- (a) The function  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  defined as  $f(x) = x^2$  is injective.
- (b) If  $X$  has the uniform distribution on  $[a, b]$ , then mean of  $X$  is  $\frac{b - a}{2}$ .
- (c) The domain of the real valued function  $f$  defined by  $f(x) = \frac{\sqrt{1 - 2x}}{1 + x}$  is the set of all real numbers.
- (d) The function  $f$  defined by  $f(x) = \cos x$  is monotonic in the interval  $[0, \pi]$ .
- (e) If two variables  $X$  and  $Y$  are positively correlated, then the coefficient of correlation between them lies in  $[-1, 1]$ .



स्नातक उपाधि कार्यक्रम  
(बी.डी.पी.)  
सत्रांत परीक्षा  
दिसम्बर, 2022

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित  
एम.टी.ई.-03 : गणितीय विधियाँ

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50  
(कुल का : 70%)

**नोट:** प्रश्न सं. 7 अनिवार्य है । प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।

1. (क) मान लीजिए  $x, y, z$  समांतर श्रेणी में है और इनका योगफल 15 है । यदि इन तीनों संख्याओं में क्रमशः 1, 3, 9 जोड़ा जाए, तो इनसे एक गुणोत्तर श्रेणी प्राप्त होती है ।  $x, y$  और  $z$  ज्ञात कीजिए । 4

(ख) एक कॉलेज के छात्रों के भारों का प्रसामान्य बंटन लीजिए जिसका माध्य 55 किग्रा है और मानक विचलन 5 किग्रा है । इस बात की प्रायिकता क्या है कि एक छात्र का भार

(i) 60.5 किग्रा और 64.5 किग्रा के बीच हो ?

(ii) 65 किग्रा से अधिक हो ?

[आप इन मानों का प्रयोग कर सकते हैं :

$\phi(1) = 0.8413, \phi(1.1) = 0.8643, \phi(1.9) = 0.9713,$

$\phi(2) = 0.9772, \phi(2.1) = 0.9821]$

6

2. (क)  $\frac{\ln x}{x}$  का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए, जहाँ  $0 < x < \infty$  है । 4

- (ख) समुच्चय  $X = \{x, y, z, v, w\}$  लीजिए और मान लीजिए  $A = \{x, y\}$  और  $B = \{y, z, w\}$  समुच्चय  $X$  के उपसमुच्चय हैं ।  $A$  और  $B$  के लिए द मॉर्गन नियमों को सत्यापित कीजिए । 6

3. (क) अवकल समीकरण

$$3e^x \tan y + (1 - e^x) \sec^2 y \frac{dy}{dx} = 0$$

को हल कीजिए । 4

- (ख) सदिशों की सहायता से यह सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं  $A(1, -2, 3)$ ,  $B(2, 0, 4)$  और  $C(0, 3, 0)$  से एक समकोण त्रिभुज बनता है । 4

- (ग) चावल की पाँच बोरियों में प्रत्येक बोरी का भार 102 किग्रा है और अन्य आठ बोरियों में प्रत्येक बोरी का भार 98 किग्रा है । इन 13 बोरियों का औसत भार कितना है ? 2

4. (क) मान लीजिए

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3 + 3xy}{x + y}.$$

दिखाइए कि  $f_{xy} = f_{yx}$ . 4

(ख) दो समान सिक्कों को लगातार 100 बार उछालने पर दो चित 30 बार आते हैं, दो पट 30 बार आते हैं और एक चित और एक पट 40 बार आते हैं। क्या यह परिणाम इस परिकल्पना से मेल खाता है कि 5% सार्थकता-स्तर पर सिक्कों को उछालना यादृच्छिक है ? पुष्टि कीजिए।

[आप इन मानों का प्रयोग कर सकते हैं :

6

$$\chi_{1, 0.05}^2 = 3.84, \chi_{2, 0.05}^2 = 5.99, \chi_{3, 0.05}^2 = 7.82]$$

5. (क) उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र रेखा

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-5} \text{ पर स्थित है और जो बिन्दुओं}$$

(0, -2, -4) और (2, -1, -1) से होकर गुजरता है।

6

(ख) तीन डिब्बों में क्रमशः  $B_1$  : 5 लाल और 5 काली,  $B_2$  : 4 लाल और 8 काली,  $B_3$  : 3 लाल और 6 काली गेंदें हैं। एक डिब्बा यादृच्छया चुना जाता है और उसमें से एक गेंद निकाली गई है जो कि काले रंग की पाई गई। इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि चुना गया डिब्बा  $B_3$  था।

4

6. (क) वक्र  $y(x - y)^3 - y(x - y) = 2$  की अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

4

(ख) एक पुस्तक के एक पृष्ठ पर कोई भी गलती न होने की प्रायिकता  $e^{-4}$  है। एक पृष्ठ पर 2 से अधिक गलतियाँ होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

3

(ग) पाँच इकाइयाँ : A, B, C, D, E वाली एक समष्टि लीजिए। प्रतिस्थापन किए बिना ऊपर की समष्टि से लिए गए आकार 2 के सभी संभव प्रतिदर्शों की सूची बनाइए।

3

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं या असत्य? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति या प्रत्युदाहरण दीजिए।  $5 \times 2 = 10$

(क)  $f(x) = x^2$  द्वारा परिभाषित फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  एकैकी है।

(ख) यदि  $[a, b]$  पर  $X$  का एकसमान बंटन है, तो  $X$  का माध्य  $\frac{b-a}{2}$  होगा।

(ग)  $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{1+x}$  द्वारा परिभाषित वास्तविक मान फलन  $f$  का प्रांत सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

(घ)  $f(x) = \cos x$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$  अंतराल  $[0, \pi]$  में एकदिष्ट है।

(ङ) यदि दो चर  $X$  और  $Y$  धनात्मक रूप से सहसंबंधित हों, तो  $X$  और  $Y$  के बीच सहसंबंध गुणांक  $[-1, 1]$  में स्थित होगा।

---