

No. of Printed Pages : 11

MTE-13

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

December, 2022

MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

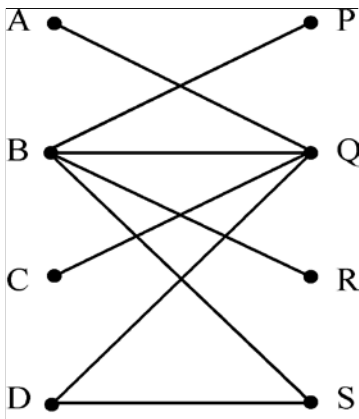
Note : *Question No. 1 is compulsory. Answer any
four questions from Question Nos. 2 to 7.*

Use of calculators is not allowed.

1. Which of the following statements are True and which are False ? Justify your answers : 10
 - (i) The number of possible outcomes obtained by throwing a dice 7 times is 7^6 .
 - (ii) $n^2 + 289 > 34n$ for all $n \geq 18$.
 - (iii) The graph $K_{4,5}$ is Eulerian.
 - (iv) “ $2^m + 1$ is an even number for infinitely many values of $m \in \mathbb{N}$ ” is a proposition.

P. T. O.

- (v) The generating function of the recurrence relation, $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ is $z^2 - 5z + 6$.
2. (a) If a 5-digit number is chosen at random, then what is the probability that the product of its digits is 54 ? 3
- (b) Check whether or not there is a complete matching in the following graph : 2



- (c) Let \mathbf{B} be a Boolean algebra. Let $f : \mathbf{B}^2 \rightarrow \mathbf{B}$ be a function defined by $f(0,0) = 0$, $f(0,1) = 1$, $f(1,0) = 1$ and $f(1,1) = 1$. Find the Boolean expression in DNF specifying f . Further, find the CNF of f also. 5

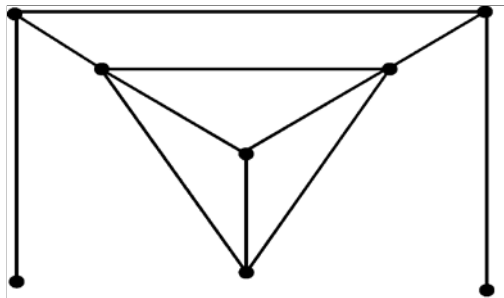
3. (a) Find a particular solution of the recurrence relation : 4

$$a_n - 8a_{n-1} + 16a_{n-2} = 3 \cdot 4^n (n \geq 2).$$

- (b) Draw a connected planar 3-regular graph with 8 vertices. Also find the number of regions in this graph. 3

- (c) Determine the number of integer solutions of the equation $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10$, $y_i \geq 0 \forall i = 1, 2, \dots, 5$. Hence determine the number of positive solutions of the equation above. 3

4. (a) Find $\chi(G)$ for the following graph G , justifying your answer. Further, check whether G is critical or not : 3



- (b) Draw the Ferrar graph of the partition P, $2 + 9 + 6 + 3 + 2$. Also write the conjugate partition of P. Hence decide whether P is self-conjugate or not. 3
- (c) Using the generating function technique, evaluate the following sum : 4

$$\sum_{r=1}^n r \cdot 3^r \cdot C(n, r).$$

5. (a) Check whether the following argument is valid or not : 5

$$\sim p \rightarrow \sim q$$

$$r \rightarrow p$$

$$\frac{r}{\therefore q}$$

- (b) How many positive integers ≤ 2000 are not divisible by any of 5, 7 or 11 ? 5
6. (a) Consider the sequence of integers 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. How many permutations of this sequence are there in which 3, 5, 7 do not occupy their original position in the sequence ? 2

(b) Use the method of proof by contradiction to show that, for $x \in \mathbb{R}$, if $x^3 + 2x^2 + 3x = 0$, then $x = 0$. 3

(c) Find the solution of the recurrence relation :

$$a_n = 13a_{n-2} - 12a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

with the initial conditions $a_0 = -1, a_1 = 8$
and $a_2 = 0$. 5

7. (a) Is it possible to construct a graph with 10 vertices in which four vertices have degree 2 each, three vertices have degree 3 each and the remaining vertices have degree 1 each ? Justify your answer. 2

(b) Use mathematical induction to prove that : 4

$$2n^2 > (n + 1)^2 \quad \text{for all } n \geq 3.$$

(c) Let a_n be the number of ways a set with n elements can be written as the union of two disjoint non-empty subsets. Give a recurrence relation for a_n . 2

(d) Give a non-Hamiltonian Eulerian graph, with justification. 2

MTE-13

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2022

एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे

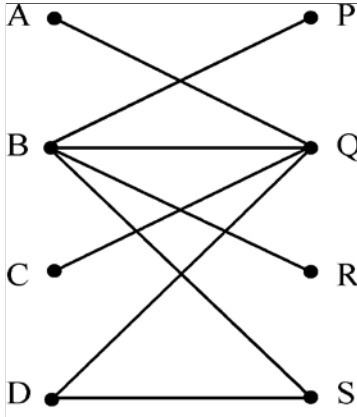
अधिकतम अंक : 50

नोट : प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर्स के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए : 10
 - (i) एक पाँसे को 7 बार उछालने पर प्राप्त संभव परिणामों की संख्या 7^6 है।
 - (ii) सभी $n \geq 18$ के लिए $n^2 + 289 > 34n$ है।
 - (iii) ग्राफ $K_{4,5}$ ऑयलरीय है।
 - (iv) “ $m \in \mathbb{N}$ के अनंत मानों के लिए, $2^m + 1$ सम संख्या है। ” एक कथन है।

(v) पुनरावृत्ति सम्बन्ध $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ के लिए जनक फलन $z^2 - 5z + 6$ है।

2. (क) यदि एक 5-अंकीय संख्या यादृच्छया चुनी जाती है, तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि इसके अंकों का गुणनफल 54 है ? 3
- (ख) जाँच कीजिए कि नीचे दिए गए ग्राफ में एक पूर्ण सुमेलन है या नहीं : 2



- (ग) मान लीजिए \mathbf{B} एक बूलीय बीजगणित है। मान लीजिए $f : \mathbf{B}^2 \rightarrow \mathbf{B}$ एक फलन है जो $f(0,0) = 0$, $f(0,1) = 1$, $f(1,0) = 1$ और $f(1,1) = 1$ द्वारा परिभाषित है। f को निर्धारित करने वाला एक बूलीय व्यंजक DNF के रूप में ज्ञात कीजिए। आगे, f का CNF रूप भी ज्ञात कीजिए। 5

3. (क) पुनरावृत्ति सम्बन्ध : 4

$$a_n - 8a_{n-1} + 16a_{n-2} = 3 \cdot 4^n (n \geq 2)$$

का एक विशेष हल ज्ञात कीजिए।

- (ख) एक 8 शीर्षों वाला संबद्ध समतलीय 3-नियमित ग्राफ बनाइए। इस ग्राफ में प्रदेशों की संख्या ज्ञात कीजिए। 3

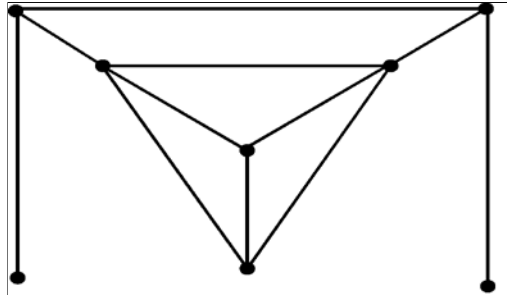
- (ग) समीकरण : 3

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10,$$

$$y_i \geq 0 \forall i = 1, 2, \dots, 5.$$

के पूर्णांक हलों की संख्या ज्ञात कीजिए। इस प्रकार, उपर्युक्त समीकरण के धन पूर्णाकों में हलों की संख्या ज्ञात कीजिए। 3

4. (क) अपने उत्तर की पुष्टि के साथ, नीचे दिए गए ग्राफ G के लिए $\chi(G)$ ज्ञात कीजिए। आगे, जाँच कीजिए कि G क्रांतिक है या नहीं : 3



(ख) विभाजन P , $2 \oplus 9 + 6 + 3 + 2$ का फेरर ग्राफ बनाइए। साथ ही P का संयुग्मी विभाजन भी लिखिए। इस प्रकार, निर्धारित कीजिए कि P स्वसंयुग्मी है या नहीं। 3

(ग) जनक फलन तकनीक का प्रयोग करके निम्नलिखित योगफल ज्ञात कीजिए : 4

$$\sum_{r=1}^n r \cdot 3^r \cdot C(n, r)$$

5. (क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित तर्क मान्य है या नहीं : 5

$$\sim p \rightarrow \sim q$$

$$r \rightarrow p$$

$$\frac{r}{\therefore q}$$

(ख) संख्याओं 5, 7 या 11 से विभाजित होने वाले ऐसे कितने धन पूर्णांक हैं जो 2000 से कम या बराबर हैं ? 5

6. (क) पूर्णाकों के अनुक्रम 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 पर विचार कीजिए। इस अनुक्रम के कितने क्रमचय बनेंगे यदि 3, 5 और 7 अनुक्रम में अपने वास्तविक स्थान पर न आयें ? 2

(ख) अन्तर्विरोध द्वारा उपपत्ति का प्रयोग करके दिखाइए कि $x \in \mathbb{Q}$ के लिए यदि $x^3 + 2x^2 + 3x = 0$ है, तो $x = 0$ होगा। 3

(ग) प्रारंभिक प्रतिबंधों $a_0 = -1, a_1 = 8$ और $a_2 = 0$ के साथ पुनरावृत्ति सम्बन्ध :

$$a_n = 13a_{n-2} - 12a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

को हल कीजिए। 5

7. (क) क्या 10 शीर्षों पर एक ऐसा ग्राफ बनाया जा सकता है जिसमें 4 शीर्षों की कोटियाँ 2 हों, 3 शीर्षों की कोटियाँ 3 हों और शेष शीर्षों की कोटियाँ 1 हों ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

2

(ख) गणितीय आगमन का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि सभी $n \geq 3$ के लिए $2n^2 > (n+1)^2$ है। 4

- (ग) मान लीजिए a_n उन तरीकों की संख्या है जिनमें n अवयवों वाले किसी समुच्चय को दो अरिक्त असंयुक्त उपसमुच्चयों के सम्मिलन के रूप में लिखा जा सकता है। a_n के लिए एक पुनरावृत्ति सम्बन्ध दीजिए। 2
- (घ) पुष्टि सहित एक अ-हैमिल्टोनीय ऑयलरीय ग्राफ का उदाहरण दीजिए। 2