

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)****Term-End Examination****December, 2022****ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage : 70%)*

Note : *Question no. 7 is compulsory. Attempt any four questions from Questions No. 1 to 6. Use of calculators is not allowed. All the symbols have their usual meaning.*

1. (a) Calculate mean and median from the following data :

4

<i>Marks</i>	<i>No. of Students</i>
0 – 10	5
10 – 20	15
20 – 30	20
30 – 40	10
40 – 50	8

(b) Rajesh and Rohan appear in an interview for two vacancies for the same post. The probability of Rajesh's selection is $\frac{1}{7}$ and Rohan's selection is $\frac{1}{5}$. Find the probability that

4

(i) both of them will be selected,

(ii) only one of them will be selected,

(iii) none of them will be selected.

(c) Let X and Y be two independent random variables with $\text{Var}(X) = 2$ and $\text{Var}(Y) = k$. If the variance of $3X - Y$ is 25, find the value of k .

2

2. (a) If X follows the uniform distribution on $[0, a]$, then find its moment generating function.

5

(b) Let x_1, x_2, \dots, x_n be a random sample from a Poisson distribution with parameter λ . Obtain maximum likelihood estimator of λ .

5

3. (a) Let x_1, x_2, \dots, x_n be a random sample from a normal distribution $N(\mu, 4)$. Find a critical region for testing

$H_0 : \mu = \mu_0$ against $H_1 : \mu = \mu_1$ ($\mu_1 > \mu_0$)

5

- (b) Show that the weighted arithmetic mean of first n natural numbers whose weights are equal to the corresponding number is equal to $\frac{(2n+1)}{3}$.

5

4. (a) Look at the data given in the following table where X is the independent variable and Y is the dependent one. Fit the regression line $Y = a + bX$.

5

X	Y
1	2
2	4
3	7
4	6
5	5
6	6
7	5

- (b) Let X and Y be two random variables having joint probability density function

$$f(x, y) = \frac{1}{2}; 0 \leq y \leq x \leq 2$$

Find

5

- (i) the marginal density function of X and Y

- (ii) conditional density $f\left(\frac{y}{x}\right)$

- (iii) check the independence of X and Y

5. (a) If a random variable X follows the Poisson distribution such that $P[x = 1] = P[x = 2]$, find 5
- (i) the mean of the distribution
- (ii) $P[x = 0]$
- (iii) standard deviation of the distribution
- (b) In a large population, the proportion of people having a certain disease is 0.02. Find the probability that in a random group of 100 people, at least 2 will have the disease. 3
- (c) Let X follow gamma distribution with parameters a and b with mean = 2 and variance 5. Find a and b . 2
6. (a) There are two coins — one unbiased with $P(H) = \frac{1}{2}$, the other biased with $P(H) = \frac{1}{3}$. One of these coins is selected and tossed 4 times. If the head comes at least twice, the coin is assumed to be unbiased. Find the level of significance and power of the test. 5
- (b) The first three moments of a distribution about the value 2 of a variable are 1, 16, – 40. Show that the mean is 3, the variance is 15 and $\mu_3 = -86$. 5

7. Which of the following statements are *true* or *false* ? Give a short proof or a counter example in support of your answer :

5×2=10

(a) If a distribution is skewed to the right, then Mean < Median < Mode.

(b) If $b_{XY} = \frac{1}{9}$, $b_{YX} = \frac{1}{4}$, then $r = \frac{1}{6}$.

(c) If X and Y are independent random variables, then the moment generating function is

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) + M_Y(t)$$

(d) If a dice is thrown two times, then the probability of getting a sum of 10 on the faces is $\frac{1}{9}$.

(e) $H : \mu < \mu_0$, where μ is the mean of normal distribution with variance 4, is a simple hypothesis.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2022

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-11 : प्राथिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50
(भारिता : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 7 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरो का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है। सभी संकेतों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. (क) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य और माध्यिका परिकलित कीजिए :

4

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0 – 10	5
10 – 20	15
20 – 30	20
30 – 40	10
40 – 50	8

- (ख) राजेश और रोहन एक समान पद के लिए दो रिक्त पदों के लिए साक्षात्कार में उपस्थित हुए। राजेश के चयन की प्रायिकता $\frac{1}{7}$ और रोहन के चयन की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है। निम्नलिखित प्रायिकता ज्ञात कीजिए : 4
- (i) वे दोनों चुने जाएँगे।
- (ii) उन दोनों में से केवल एक चुना जाएगा।
- (iii) उनमें से कोई भी नहीं चुना जाएगा।
- (ग) मान लीजिए X और Y दो स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं जिनका $\text{Var}(X) = 2$ और $\text{Var}(Y) = k$ है। यदि $3X - Y$ का प्रसरण 25 है, तो k का मान ज्ञात कीजिए। 2
2. (क) यदि X अंतराल $[0, a]$ पर एकसमान बंटन में है, तो इसका आघूर्ण जनक फलन ज्ञात कीजिए। 5
- (ख) मान लीजिए कि x_1, x_2, \dots, x_n , एक प्वासों बंटन, जिसका प्राचल λ है, से लिया गया यादृच्छिक प्रतिदर्श है। λ का अधिकतम संभावित आकलक ज्ञात कीजिए। 5
3. (क) मान लीजिए कि x_1, x_2, \dots, x_n एक प्रसामान्य बंटन $N(\mu, 4)$ से लिया गया यादृच्छिक प्रतिदर्श है। परिकल्पना $H_0 : \mu = \mu_0$, विरुद्ध $H_1 : \mu = \mu_1 (\mu_1 > \mu_0)$ के परीक्षण के लिए क्रांतिक प्रदेश ज्ञात कीजिए। 5

(ख) दर्शाइए कि प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का भारत
समांतर माध्य $\frac{(2n + 1)}{3}$ है, जबकि भार संगत संख्या
के समान है ।

5

4. (क) निम्नलिखित सारणी में दिए गए आँकड़े लीजिए जिनमें
 X एक स्वतंत्र चर है और Y एक अस्वतंत्र चर है ।
समाश्रयण रेखा $Y = a + bX$ आसंजित कीजिए ।

5

X	Y
1	2
2	4
3	7
4	6
5	5
6	6
7	5

(ख) मान लीजिए कि X और Y दो यादृच्छिक चर हैं जिनका
संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन निम्नलिखित है :

$$f(x, y) = \frac{1}{2}; 0 \leq y \leq x \leq 2$$

ज्ञात कीजिए

5

(i) X और Y का सीमांत घनत्व फलन

(ii) $f\left(\frac{y}{x}\right)$ का प्रतिबंधित घनत्व

(iii) X और Y की स्वातंत्र्यता की जाँच कीजिए

5. (क) यदि X एक प्वासों बंटन वाला यादृच्छिक चर है जिसके लिए $P[x = 1] = P[x = 2]$ है, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए : 5
- (i) बंटन का माध्य
- (ii) $P[x = 0]$
- (iii) बंटन का मानक विचलन
- (ख) एक बड़ी समष्टि में, लोगों में एक विशेष बीमारी के होने की प्रायिकता 0.02 है। वह प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि 100 लोगों के एक यादृच्छिक समूह में कम-से-कम 2 लोगों को यह बीमारी होगी। 3
- (ग) मान लीजिए कि X प्राचल a और b वाला गामा बंटन है जिसका माध्य 2 और प्रसरण 5 है। a और b ज्ञात कीजिए। 2
6. (क) दो सिक्के हैं जिनमें से एक $P(H) = \frac{1}{2}$ वाला अनभिनत सिक्का और दूसरा $P(H) = \frac{1}{3}$ वाला अभिनत है। इनमें से एक सिक्का चुनकर उसे 4 बार उछाला जाता है। यदि कम-से-कम दो बार चित आता है, तो मान लिया जाता है कि सिक्का अनभिनत होगा। सार्थकता स्तर और परीक्षण की क्षमता ज्ञात कीजिए। 5
- (ख) एक चर के लगभग मान 2 वाले बंटन के प्रथम तीन आघूर्ण 1, 16 और -40 हैं। दिखाइए कि माध्य 3, प्रसरण 15 और $\mu_3 = -86$ है। 5

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं अथवा कौन-से असत्य ? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति या प्रत्युदाहरण दीजिए : 5×2=10

(क) यदि एक बंटन दाईं ओर वैषम्य है, तो

माध्य < माध्यिका < बहुलक होगा ।

(ख) यदि $b_{XY} = \frac{1}{9}$, $b_{YX} = \frac{1}{4}$, तो $r = \frac{1}{6}$ है ।

(ग) यदि X और Y स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं तो इनका आघूर्ण जनक फलन $M_{X+Y}(t) = M_X(t) + M_Y(t)$ है ।

(घ) यदि एक पासे को दो बार फेंका जाए, तो फलकों पर योगफल 10 आने की प्रायिकता $\frac{1}{9}$ है ।

(ङ) $H : \mu < \mu_0$, जहाँ μ प्रसरण 4 वाले प्रसामान्य बंटन का माध्य है, एक साधारण परिकल्पना है ।
