

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME****(BDP)****Term-End Examination****December, 2022****ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS****MTE-01 : CALCULUS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage : 70%)*

---

**Note :** Question no. 1 is **compulsory**. Attempt any **four** questions from questions no. 2 to 7. Use of calculators is **not** allowed.

---

---

1. Which of the following statements are *True* and which are *False* ? Justify your answers with the help of a short proof or a counter-example.  $5 \times 2 = 10$

(a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{9-x^2} = 6$

- (b) The curve given by  
$$y(x^2 + 3x + 7) + 5 = 0$$
has an oblique asymptote.

(c)  $\frac{d}{dx} \left[ \int_x^{\cos x} \tan t^2 dt \right] = \tan(\cos^2 x) \sin x + \tan x^2.$

- (d) The function,  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  defined by

$$f(x) = |x| - \frac{1}{2}$$

is differentiable at  $x = \frac{1}{2}$ .

- (e) Rolle's theorem is applicable for the function

$$f(x) = \frac{5}{2} + \frac{2}{x^2} \text{ on } [-2, 2].$$

2. (a) If  $y = \cos(m \cos^{-1} x)$ , then check whether or not  $(1 - x^2) y_{n+2} - (2n + 1) x y_{n+1} + (n^2 - m^2) y_n = 0$  is true. Also find  $y_n(0)$ , if it exists, when  $n$  is an even positive integer. 5

- (b) Evaluate : 5

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2 (x^2+9)}$$

3. (a) Differentiate  $\sin^{-1} \left( \sqrt{1-x^2} \right)$  with respect to  $\cos^{-1} (2x^2 - 1)$ . 2

- (b) The cost of fuel used for running an engine is  $\frac{1200}{v} \left( 300 + \frac{3}{16} v^2 \right)$ , where  $v$  is the speed in km/hr. Find the speed which minimises the total cost. 4

(c) If  $I_n = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos^n x \, dx,$

find a relation connecting  $I_n$  and  $I_{n-2}$  ( $n \geq 2$ ). 4

4. (a) Evaluate : 2

$$\int \frac{2 \sin x - 3 \cos x}{3 \sin x + 2 \cos x} dx$$

(b) If  $f$  is a function from  $\mathbf{R} - \{3\} \rightarrow \mathbf{R}$  defined

by  $f(x) = \frac{2x^2 - 9x + 9}{x - 3},$  find a  $\delta > 0,$  such

that  $|f(x) - 3| < \frac{1}{100}$  for  $0 < |x - 3| < \delta.$

Hence, show that  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3.$  4

(c) Find the volume of the solid generated by the revolution of  $r = 2 \cos \theta,$  about the initial line. 4

5. Trace the curve,  $x^2 + y^2(x - 1)^3 = 0,$  stating all the properties used in the process. 10

6. (a) Find the value(s) of  $k$  for which the function  $f$  defined by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2x}{kx^2}, & x \neq 0 \\ 2 + x + \sin^2 x, & x = 0 \end{cases}$$

is continuous at  $x = 0.$  2

(b) Evaluate : 4

$$\int_2^3 x \ln x \, dx$$

(c) Find an approximate value of  $\ln 3$ , by solving the integral  $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ , using the Trapezoidal rule with 5 ordinates. 4

7. (a) Verify mean value theorem for  $f$  defined by

$$f(x) = 3x^3 - 8x + 3, \text{ on } [0, 3]. \quad 3$$

(b) Find

$$\frac{dy}{dx}, \text{ if } y = x^{\cos x} \quad 2$$

(c) Find the length of the loop of the curve,

$$6y^2 = x(x-2)^2. \quad 5$$

---

स्नातक उपाधि कार्यक्रम  
(बी.डी.पी.)  
सत्रांत परीक्षा  
दिसम्बर, 2022

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित  
एम.टी.ई.-01 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50  
(कुल का : 70%)

**नोट:** प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? अपने उत्तर के पक्ष में एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रत्युदाहरण दीजिए। 5×2=10

(क)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{9-x^2} = 6$

(ख) वक्र

$$y(x^2 + 3x + 7) + 5 = 0$$

की एक तिर्यक अनंतस्पर्शी है।

(ग)  $\frac{d}{dx} \left[ \int_x^{\cos x} \tan t^2 dt \right] = \tan(\cos^2 x) \sin x + \tan x^2.$

(घ)  $f(x) = |x| - \frac{1}{2}$  द्वारा परिभाषित फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  
 $x = \frac{1}{2}$  पर अवकलनीय है ।

(ङ) फलन  $f(x) = \frac{5}{2} + \frac{2}{x^2}$  के लिए, अंतराल  $[-2, 2]$  पर  
 रोल प्रमेय लागू होता है ।

2. (क) यदि  $y = \cos(m \cos^{-1} x)$  है, तो जाँच कीजिए कि  
 $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)x y_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$   
 सत्य है या नहीं ।  $y_n(0)$  भी ज्ञात कीजिए, यदि यह  
 अस्तित्व में है, जहाँ  $n$  एक सम धनात्मक पूर्णांक है । 5

(ख) मान ज्ञात कीजिए : 5

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x^2+9)}$$

3. (क)  $\sin^{-1}(\sqrt{1-x^2})$  को  $\cos^{-1}(2x^2-1)$  के सापेक्ष  
 अवकलित कीजिए । 2

(ख) एक ईंजन को चलाने के लिए प्रयोग किए गए ईंधन की  
 लागत  $\frac{1200}{v} \left(300 + \frac{3}{16}v^2\right)$  है, जहाँ  $v$ , km/hr में  
 चाल है । कुल लागत का न्यूनतमीकरण करने वाली  
 चाल ज्ञात कीजिए । 4

(ग) यदि  $I_n = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos^n x \, dx$  है, तो  $I_n$  और  $I_{n-2}$

( $n \geq 2$ ) को जोड़ने वाला संबंध ज्ञात कीजिए । 4

4. (क) मान ज्ञात कीजिए : 2

$$\int \frac{2 \sin x - 3 \cos x}{3 \sin x + 2 \cos x} dx$$

(ख) यदि  $f(x) = \frac{2x^2 - 9x + 9}{x - 3}$  द्वारा परिभाषित फलन

$f, \mathbf{R} - \{3\}$  से  $\mathbf{R}$  पर है, तो एक  $\delta > 0$  ज्ञात कीजिए कि

$0 < |x - 3| < \delta$  के लिए  $|f(x) - 3| < \frac{1}{100}$  है ।

इस प्रकार दर्शाइए कि  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$ . 4

(ग)  $r = 2 \cos \theta$  के प्रारम्भिक रेखा के सापेक्ष घूर्णन द्वारा बने ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए । 4

5. वक्र  $x^2 + y^2 (x - 1)^3 = 0$  का आरेखण कीजिए और आरेखण में प्रयोग किए गए सभी गुणधर्मों को लिखिए । 10

6. (क)  $k$  के वे मान निकालिए जिनके लिए

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2x}{kx^2}, & x \neq 0 \\ 2 + x + \sin^2 x, & x = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन  $f, x = 0$  पर संतत है । 2

(ख) मान ज्ञात कीजिए :

4

$$\int_2^3 x \ln x \, dx$$

(ग) समलंबी नियम का प्रयोग करके, 5 उप-अंतरालों के

साथ समाकलन  $\int_1^3 \frac{dx}{x}$  को हल करते हुए  $\ln 3$  का सन्निकटन मान ज्ञात कीजिए ।

4

7. (क)  $f(x) = 3x^3 - 8x + 3$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$  के लिए  $[0, 3]$  पर माध्य मान प्रमेय सत्यापित कीजिए ।

3

(ख) यदि  $y = x^{\cos x}$  है, तो  $\frac{dy}{dx}$  ज्ञात कीजिए ।

2

(ग) वक्र  $6y^2 = x(x-2)^2$  के पाश की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

5

---