

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

December, 2022

(Elective Course : Mathematics)

MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Note : (i) *Question No. 1 is compulsory.*

(ii) *Answer any **four** questions from the remaining Question Nos. 2 to 7.*

(iii) *Use of calculator is not allowed.*

(iv) *Symbols have their usual meanings.*

1. State whether the following statements are True or False. Justify your answer with the help of a short proof or a counter-example :

$$2 \times 5 = 10$$

- (i) The IVP $xy' = 2y, y(0) = 1$, has a solution.

P. T. O.

(ii) The differential equation :

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y = 0$$

is elliptic for $x \neq 0, y \neq 0$.

(iii) The differential equation :

$$\cos y dx + (y^2 - x \sin y) dy = 0$$

is exact.

(iv) The Pfaffian equation :

$$(2xy^2 + 2xy + 2xz^2 + 1) dx + dy + 2z dz = 0$$

is integrable.

(v) The partial differential equation :

$$(x^2 - y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (y^2 - ux) \frac{\partial u}{\partial y} = u^2 - xy$$

is a first order linear partial differential equation.

2. (a) Solve the differential equation : 3

$$2x e^y dx + (x^2 e^y + \cos y) dy = 0.$$

(b) Use the method of undetermined coefficients to find the general solution of the differential equation : 4

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = ye^{2x}$$

- (c) Solve the differential equation : 3

$$\frac{dy}{dx} + xy = y^2 e^{x^2/2} \log x .$$

3. (a) Use the method of variation of parameters to solve the differential equation : 4

$$y'' - 2y' + y = e^x \sin x$$

- (b) Find the integral curves of the differential equations : 4

$$\frac{dx}{y + zx} = \frac{dy}{-(x + zy)} = \frac{dz}{x^2 - y^2}$$

- (c) Find a particular integral of the differential equation : 2

$$(D^2 + 3DD' + 2D'^2)z = x + y$$

4. (a) Find the complete integral of the differential equation : 4

$$pq = xz .$$

- (b) Solve the differential equation : 3

$$\left(x^2 D^2 - 4xy DD' + 4y^2 D'^2 + 6yD' \right) z = x^3 y^4$$

- (c) Find a particular integral of the following differential equation : 3

$$(D^2 + 2) y = x^2 e^{3x} .$$

5. (a) Solve the Laplace equation : 6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

in the rectangle with $u(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0$,
 $u(x, b) = 0$ and $u(x, 0) = f(x)$.

- (b) Find the complete solution of the following equation : 4

$$(D^2 - 4D + 4) y = x^2 + e^x + \cos 2x$$

6. (a) Verify that the differential equation : 4

$$(y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz = 0$$

is integrable. Find its integral using the method of solving Pfaffian differential equations.

- (b) Solve the differential equation : 3

$$(D^2 + 2DD' + D'^2) z = 2 \cos y - x \sin y$$

- (c) Solve the differential equation : 3

$$(2x + y + 1) dx + (4x + 2y - 1) dy = 0$$

7. (a) The half life of a radioactive cobalt is 5.27 yrs. Suppose that a nuclear accident has left the level of cobalt radiation in a certain region at 100 times the level acceptable for human habitation. How long will it take the region to be habitable again ? 5

- (b) Find the solution of the equation :

$$z(x+y) \frac{\partial z}{\partial x} + z(x-y) \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$$

with $z = 0$ on $y = 2x$. 5

MTE-08

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2022

(ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित)

एम. टी. ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न सं. 2 से 7 तक किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iii) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

(iv) प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य।
संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने
उत्तर की पुष्टि कीजिए : 2×5=10

(i) आदिमान समस्या $xy' = 2y, y(0) = 1$, का एक
हल है।

(ii) $x \neq 0, y \neq 0$ के लिए अवकल समीकरण :

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y = 0,$$

दीर्घवृत्त है।

(iii) अवकल समीकरण :

$$\cos y dx + (y^2 - x \sin y) dy = 0$$

यथातथ है।

(iv) फैफियन समीकरण :

$$(2xy^2 + 2xy + 2xz^2 + 1) dx + dy + 2z dz = 0$$

समाकलनीय है।

(v) आंशिक अवकल समीकरण :

$$(x^2 - y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (y^2 - ux) \frac{\partial u}{\partial y} = u^2 - xy$$

एक प्रथम कोटि रैखिक आंशिक अवकल
समीकरण है।

2. (क) अवकल समीकरण : 3

$$2x e^y dx + (x^2 e^y + \cos y) dy = 0$$

को हल कीजिए।

- (ख) अनिर्धारित गुणांक विधि का प्रयोग करके अवकल

समीकरण : 4

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 4e^{2x}$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

- (ग) अवकल समीकरण :

$$\frac{dy}{dx} + xy = y^2 e^{x^2/2} \log x$$

को हल कीजिए। 3

3. (क) प्राचल विचरण विधि का प्रयोग करके अवकल

समीकरण : 4

$$y'' - 2y' + y = e^x \sin x$$

को हल कीजिए।

(ख) अवकल समीकरणों : 4

$$\frac{dx}{y + zx} = \frac{dy}{-(x + zy)} = \frac{dz}{x^2 - y^2}$$

के समाकल वक्र ज्ञात कीजिए।

(ग) अवकल समीकरण : 2

$$(D^2 + 3DD' + 2D'^2)z = x + y$$

का एक विशेष हल ज्ञात कीजिए।

4. (क) अवकल समीकरण : 4

$$pq = xz$$

का संपूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

(ख) अवकल समीकरण : 4

$$\left(x^2 D^2 - 4xy DD' + 4y^2 D'^2 + 6y D' \right) z = x^3 y^4$$

को हल कीजिए।

(ग) निम्नलिखित अवकल समीकरण का एक विशेष

हल ज्ञात कीजिए : 3

$$(D^2 + 2)y = x^2 e^{3x}$$

5. (क) आयत $u(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0$, $u(x, b) = 0$ और

$$u(x, 0) = f(x) \text{ में लाप्लास समीकरण : } \quad 6$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

को हल कीजिए।

- (ख) निम्नलिखित समीकरण का संपूर्ण हल कीजिए : 4

$$(D^2 - 4D + 4)y = x^2 + e^x + \cos 2x$$

6. (क) सत्यापित कीजिए कि अवकल समीकरण : 4

$$(y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz = 0$$

समाकलनीय है। फ़ैफ़ियन अवकल समीकरणों को हल करने की विधि से इसका समाकल ज्ञात कीजिए।

- (ख) अवकल समीकरण : 3

$$(D^2 + 2DD' + D'^2)z = 2 \cos y - x \sin y$$

को हल कीजिए।

(ग) अवकल समीकरण : 3

$$(2x + y + 1) dx + (4x + 2y - 1) dy = 0$$

को हल कीजिए।

7. (क) विघटनाभिक कोबाल्ट की अर्ध आयु 5.27 वर्ष है।

मान लीजिए किसी क्षेत्र विशेष में नाभिकीय

दुर्घटना से कोबाल्ट विकिरण का स्तर मानवीय

वास स्थान के लिए स्वीकृत स्तर से 100 गुना

ज्यादा है। उस क्षेत्र को पुनः वासयोग्य होने में

कितना समय लगेगा ? 5

(ख) समीकरण :

$$z(x + y) \frac{\partial z}{\partial x} + z(x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$$

जहाँ $y = 2x$ पर $z = 0$ है, का हल ज्ञात

कीजिए। 5