No. of Printed Pages : 12

MTE-07

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2022

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Question No.* ***1*** *is compulsory.*

(ii) Attempt any ***four*** *questions out of the remaining questions* ***2*** *to* ***7****.*

(iii) Use of calculator is not allowed.

---

1. State whether the following statements are true *or* false. Give a short proof or a counter-example in support of your answer : 5×2=10

   (a) 3 is an upper bound of the set $\left\{x + \frac{2}{x} \mid 0 < x < 1\right\}$.

(b) The point (0, 0) is a point of local minima on the parabola $y^2 = 8x$.

(c) The functions $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ and $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ given by $f(x, y) = \dfrac{x + y}{2x}$ and $g(x, y) = \dfrac{x + 2y}{y}$ are functionally dependent.

(d) The map $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ given by $F(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$ is not invertible on $D = \{(x, y) \mid x > 0\} \leq \mathbf{R}^2$.

(e) The function f defined by $f(x, y) = x^2 + 3xy$ is integrable over $[2, 1] \times [1, 2]$.

2. (a) Evaluate the following : 5

(i) $\lim\limits_{x \to \infty} \left[5 \cos \dfrac{2}{x} + 6e^{-4x} + 10 \right]$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x - 6^x}{3x^2}$

(b) Show that the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ defined by :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad , & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is a continuous function on $\mathbf{R}^2$. 5

3. (a) Show that the equation :

$$7x^5 + y^5 - 16x^3y - 7 = 0$$

determines a solution $y = \phi(x)$ around the point $x = 1$ such that $\phi(1) = 2$ and $\phi'(1) = \dfrac{61}{64}$. 4

(b) Let $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ be defined by :

$$f(x, y) = \begin{cases} 12, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Show that $f_x(0, 0)$ and $f_y(0, 0)$ do not exist. 4

(c) Find the quotient $\dfrac{f}{g}$ and its domain, where $f(x, y) = 2xy$ and $g(x, y) = x^2 + 5y^2$. 2

4. (a) Let :

$$f(x, y) = \begin{cases} 5 - 7y, & xy \neq 0 \\ 0 \quad , & xy = 0 \end{cases}$$

Check whether the two repeated limits of f exist. If they exist are they equal ? 3

(b) Evaluate the repeated integral : 4

$$\int_1^2 \int_{-3}^4 (x^2y + xy^2)\, dy\, dx$$

(c) Show that :

$$f(x, y) = e^{x+y} + x^3 \cos y$$

is differentiable everywhere. 3

5. (a) Use Green's theorem to evaluate :

$$\int_C (3x^3 + y)\, dx + (2x - 3y^2)\, dy,$$

where C is the ellipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. 3

(b) Show that in $\mathbf{R}^2$ the open disc S with centre (2, 3) and radius 5 lies in the open square :

$$S_1 = \{(x, y) \mid |x - 2| < 5, |y - 3| < 5\}$$

Also show that $S_1 \not\subseteq S$. 4

(c) Let $W(x, y) = 3x^2y$, where $x(u, v) = u + v$ and $y(u, v) = 5u^3v^2$. Find $\frac{\partial W}{\partial V}$ using chain rule. 3

6. (a) Find the stationary points and the local extreme values of the function : 5

$$f(x, y) = y^4 + xy^2 + x^2,$$

where $(x, y) \in \mathbf{R^2}$.

(b) Evaluate :

$$\iiint_W y \, dx \, dy \, dz ,$$

where the region W is given by $x = 0$, $y = 0$, $z = 4$ and the surface $z = x^2 + y^2$. 5

7. (a) Find the mass of a solid substance occupying a portion of sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, which lies between the planes $\theta = \frac{\pi}{4}$ and $\theta = -\frac{\pi}{4}$, given that $\delta(x, y, z) = 5$. 4

(b) Obtain the fourth Taylor's polynomial of $f(x) = \sin x$ about $x = \frac{\pi}{2}$. 3

(c) Evaluate : 3

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{\cos \frac{\pi}{2} x}$$

MTE-07

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2022

एम. टी. ई.-07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) प्रश्न सं. 1* ***अनिवार्य*** *है।*

(ii) शेष प्रश्नों में से किन्हीं ***चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(iii) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं **या** असत्य। अपने उत्तरों के पक्ष में लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए :

$5 \times 2 = 10$

(क) 3 समुच्चय $\left\{x + \frac{2}{x} \mid 0 < x < 1\right\}$ का उपरि-बंध है।

(ख) परवलय $y^2 = 8x$ पर बिन्दु $(0, 0)$ स्थानीय निम्निष्ठ का बिन्दु है।

(ग) $f(x, y) = \frac{x + y}{2x}$ और $g(x, y) = \frac{x + 2y}{y}$ द्वारा दिए गए फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ और $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ फलनिकत: आश्रित हैं।

(घ) $F(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$ द्वारा दिया गया फलन $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $D = \{(x, y) \mid x > 0\} \leq \mathbf{R}^2$ पर व्युत्क्रमणीय नहीं है।

(ङ) $f(x, y) = x^2 + 3xy$ द्वारा परिभाषित फलन f, $[2 \times 1] \times [1, 2]$ पर समाकलनीय है।

2. (क) निम्नलिखित का मूल्यांकन कीजिए : 5

(i) $\lim_{x \to \infty} \left[5 \cos \frac{2}{x} + 6e^{-4x} + 10 \right]$

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{5^x - 6^x}{3x^2}$

(ख) दिखाइए कि :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad , & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ पर संतत फलन है। 5

3. (क) दर्शाइए कि समीकरण :

$$7x^5 + y^5 - 16x^3y - 7 = 0$$

ऐसे बिन्दु $x = 1$ के हल $y = \phi(x)$ निर्धारित करता है, जिसके लिए $\phi(1) = 2$ और $\phi'(1) = \dfrac{61}{64}$। 4

(ख) मान लीजिए $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ इस प्रकार परिभाषित है :

$$f(x, y) = \begin{cases} 12, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

दिखाइए कि $f_x(0, 0)$ और $f_y(0, 0)$ का अस्तित्व नहीं होता। 4

(ग) भागफल $\frac{f}{g}$ और इसका प्रांत ज्ञात कीजिए, जहाँ

$f(x, y) = 2xy$ और $g(x, y) = x^2 + 5y^2$। 2

4. (क) मान लीजिए :

$$f(x, y) = \begin{cases} 5 - 7y, & xy \neq 0 \\ 0 \quad , & xy = 0 \end{cases}$$

जाँच कीजिए कि f की पुनरावृत्त सीमाओं का अस्तित्व है या नहीं, यदि है, तो क्या वे बराबर हैं ? 3

(ख) पुनरावृत्त समाकलन :

$$\int_1^2 \int_{-3}^4 (x^2y + xy^2)\, dy\, dx$$

का मूल्यांकन कीजिए। 4

(ग) दिखाइए कि :

$$f(x, y) = e^{x+y} + x^3 \cos y$$

सर्वत्र अवकलनीय है। 3

5. (क) ग्रीन प्रमेय से :

$$\int_C (3x^3 + y)\,dx + (2x - 3y^2)\,dy$$

का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ $C : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ से निरूपित दीर्घवृत्त है। 3

(ख) दिखाइए कि $\mathbf{R^2}$ में केन्द्र (2, 3) और त्रिज्या 5 वाले विवृत चक्रिका, विवृत वर्ग :

$$S_1 = \{(x, y) \mid |x - 2| < 5, |y - 3| < 5\}$$

में स्थित है। यह भी दिखाइए कि $S_1 \subseteq S$. । 4

(ग) मान लीजिए $W(x, y) = 3x^2y$, जहाँ $x(u, v) = u + v$, $y(u, v) = 5u^3v^2$ । शृंखला नियम से $\frac{\partial w}{\partial v}$ ज्ञात कीजिए। 3

6. (क) फलन $f(x, y) = y^4 + xy^2 + x^2$, के स्तब्ध बिन्दु और स्थानीय चरम मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $(x, y) \in \mathbf{R^2}$ । 5

(ख) $\iiint_W y\,dx\,dy\,dz$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ प्रदेश $W : x = 0,\ y = 0,\ z = 4$ और पृष्ठ $z = x^2 + y^2$ द्वारा दिया गया है। 5

7. (क) समतलों $\theta = \frac{\pi}{4}$ और $\theta = -\frac{\pi}{4}$ के बीच स्थित गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, के भाग को घेरने वाली ठोस वस्तु का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, दिया गया है $\delta(x, y, z) = 5$। 4

(ख) $x = \frac{\pi}{2}$ पर $f(x) = \sin x$ का चतुर्थ टेलर बहुपद प्राप्त कीजिए। 3

(ग) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{\cos \frac{\pi}{2} x}$ का मूल्यांकन कीजिए। 3