No. of Printed Pages : 12 **MTE-02**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2022

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Question No.* ***7*** *is* ***compulsory****.*

(ii) Answer any ***four*** *questions from Q. No.* ***1*** *to Q. No.* ***6****.*

(iii) Use of calculator is ***not*** *allowed.*

---

1. (a) Define a binary operation on a set. Check whether defined by $x \,.\, y = x^2 + y^2$ is a binary operation on the set $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$. 2

(b) Define the row-reduced echelon form of matrices. Check whether the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ is in row-reduced echelon form. 2

P. T. O.

(c) Define the determinant rank of an $m \times n$ matrix. Find the determinant rank of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. 3

(d) Define a unitary matrix. Check whether the matrix $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ is unitary. Is this matrix invertible ? Justify your answer. 3

2. (a) Write down the formula for the angle between two vectors $u, v \in \mathbf{R}^3$. Find the angle between the vectors $(i + k)$ and $\left(\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{k}{\sqrt{2}}\right)$. 2

(b) Let $S : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ be defined by $S(x, y) = (x + y, y, y)$ and $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ be defined by $T(x, y, z) = (x - z, y)$. Find S o T and T o S. 2

(c) Define the characteristic polynomial of a matrix. Find the characteristic polynomial of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. 2

(d) Define a quadratic form. Check whether $x^2 + xy + zx + yz^2$ is a quadratic form. 2

(e) If V is an inner product space and $u, v \in$ V, when are u and v orthogonal ? Check whether the vectors (1, 1, 0, 1) and (–1, 0, 1, 1) are orthogonal to each other with respect to the standard inner product on $\mathbf{R}^4$. 2

3. (a) Let : 6

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Find :

(i) The characteristic polynomial of A

(ii) The eigen values of A

(iii) The eigen vectors of A

(b) Solve the following system of equations by Gaussian elimination : 4

$$x + y + z + t = 5$$

$$x - y + z + t = 1$$

$$x + z + t = 3$$

4. (a) State the Cayley-Hamilton theorem. Use it to find the inverse of the matrix : 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Check whether the basis B = {(–1, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, –1)} is an orthogonal basis for $\mathbf{R}^3$ with respect to the standard inner product on $\mathbf{R}^3$. Apply Gram-Schmidt orthognalisation process to B to obtain an orthonormal basis for $\mathbf{R}^3$ with respect to the standard inner product on $\mathbf{R}^3$. 5

5. (a) If V is a finite dimensional vector space and $v \neq 0$ is a vector in V, show that there is a linear functional $f \in V^*$ such that $f(v) \neq 0$. 2

(b) Find the rank and signature of the quadratic forms $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$ and $2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$. Check whether the forms are equivalent. 3

(c) Find the adjoint of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hence find its inverse. 5

6. (a) Let $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ be an ordered basis of $\mathbf{R}^3$ with $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 1)$, $\alpha_3 = (1, 0, 0)$. Write the vector $v = (a, b, c)$ as a linear combination of vectors from B. 4

(b) Let V be the vector space of 2 × 2 matrices over **R** and W_1, W_2 be subspaces of V, defined by :

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

and $$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

Find the dimensions of W_1, W_2 and $W_1 \cap W_2$. 5

(c) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, is AB defined ? Justify your answer. 1

7. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with a short proof or a counter-example :

(a) If W_1 and W_2 are subspaces of a vector space V, then $W_1 \cap W_2$ is a subspace of V. 2

(b) There is no linear operator T with characteristic polynomial $(x^2 - 1)(x + 2)(x + 3)$ and minimal polynomial $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$. 2

(c) If the characteristic polynomial of a 3×3 matrix is $(x - 1)^2 (x + 2)$, it is not diagonalisable. 2

(d) If all the eigen values of a matrix are real, the matrix is symmetric. 2

(e) Any subset of a linearly dependent set of vectors is also linearly dependent. 2

MTE-02

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2022

एम. टी. ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) प्रश्न सं 7* ***अनिवार्य*** *है।*

(ii) प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं **चार** *प्रश्नों के उत्तर लिखिए।*

(iii) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. (क) एक समुच्चय पर द्वि-आधारी संक्रिया को परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि जो $x \,.\, y = x^2 + y^2$ द्वारा परिभाषित है, समुच्चय $\mathrm{S} = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ पर एक द्वि-आधारी संक्रिया है या नहीं। 2

(ख) एक आव्यूह का पंक्ति समानीत सोपानक रूप परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ पंक्ति-समानीत सोपानक रूप में है। 2

(ग) आव्यूह $m \times n$ की सारणिक कोटि को परिभाषित कीजिए। आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ की सारणिक कोटि ज्ञात कीजिए। 3

(घ) ऐकिक आव्यूह को परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि आव्यूह $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ऐकिक है। क्या B व्युत्क्रमणीय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

2. (क) दो सदिश $u, v \in \mathbf{R}^3$ के बीच के कोण ज्ञात करने के लिए सूत्र लिखिए। सदिश $(i + k)$ और $\left(\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{k}{\sqrt{2}}\right)$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 2

(ख) मान लीजिए $S : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $S(x, y) = (x + y, y, y)$ द्वारा परिभाषित है और $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ $T(x, y, z) = (x - z, y)$ द्वारा परिभाषित है। $S \circ T$ और $T \circ S$ ज्ञात कीजिए। 2

(ग) एक आव्यूह की अभिलाक्षणिक बहुपद को परिभाषित कीजिए। आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ की अभिलाक्षणिक बहुपद ज्ञात कीजिए। 2

(घ) द्विघातीय समघात को परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि $x^2 + xy + zx + yz^2$ एक द्विघाती समघात है। 2

( ) यदि V एक आंतर गुणनफल समष्टि है और $u, v \in V$, u और v कब लांबिक होंगे ? जाँच कीजिए कि सदिश (1, 1, 0, 1) और (−1, 0, 1, 1) $\mathbf{R}^4$ के मानक आंतर गुणनफल के सापेक्ष लांबिक है। 2

3. (क) मान लीजिए : 6

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ज्ञात कीजिए :

(i) A का अभिलाक्षणिक बहुपद

(ii) A के आइगेन मान

(iii) A के आइगेन सदिश

(ख) निम्नलिखित समीकरण निकाय को गाउसीय निराकरण विधि से हल कीजिए : 4

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 5 \\ x - y + z + t &= 1 \\ x + z + t &= 3 \end{aligned}$$

4. (क) कैले-हैमिल्टन प्रमेय का कथन दीजिए। उसका प्रयोग करके आव्यूह :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम निकालिए। 5

(ख) जाँच कीजिए कि आधार B = {(–1, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, –1)} मानक आंतर गुणनफल के सापेक्ष एक लांबिक आधार है या नहीं। $\mathbf{R}^3$ पर मानक आंतर गुणनफल के सापेक्ष $\mathbf{R}^3$ के लिए लांबिक प्रासामान्य आधार प्राप्त करने के लिए ग्राम-शिमट लांबिकीकरण प्रक्रिया लागू कीजिए। 5

5. (क) यदि V एक परिमित विमीय सदिश समष्टि है और $v \neq 0, V$ में एक सदिश है, तो दिखाइए कि एक ऐसा रैखिक फलनक $f \in V^*$ होता है जिसके लिए $f(v) \neq 0$। 2

(ख) एक द्विघाती समघात $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$ और $2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ के चिह्नक और जाति ज्ञात कीजिए। जाँच कीजिए कि यह तुल्य है या नहीं। 3

(ग) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ का सहखंडज ज्ञात कीजिए। इससे A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 5

6. (क) मान लीजिए $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\mathbf{R}^3$ का क्रमित आधार है, जहाँ $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 1)$, $\alpha_3 = (1, 0, 0)$। सदिश $v = (a, b, c)$ को B के आधार सदिशों के एक घात संचय के रूप में लिखिए। 4

(ख) मान लीजिए V, $\mathbf{R}$ पर 2×2 आव्यूहों की सदिश समष्टि है और W_1, W_2 : 5

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

तथा $$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

द्वारा परिभाषित V की उपसमष्टियाँ हैं। W_1, W_2 और $W_1 \cap W_2$ की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

(ग) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, क्या AB परिभाषित है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 1

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि क्रमशः एक लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण द्वारा कीजिए :

(क) यदि W_1 और W_2 सदिश समष्टि V की उपसमष्टियाँ हैं, तो $W_1 \cup W_2$ भी V का उपसमष्टि है। 2

(ख) ऐसा कोई रैखिक संकारक नहीं है जिसका अभिलाक्षणिक बहुपद $(x^2 - 1)(x + 2)(x + 3)$ है और अल्पिष्ट बहुपद $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$ है। 2

(ग) यदि एक 3×3 आव्यूह की अभिलाक्षणिक बहुपद $(x - 1)^2 (x + 2)$ है, तो आव्यूह विकर्णनीय नहीं है। 2

(घ) यदि एक आव्यूह के सभी आइगेन मान वास्तविक हैं, तो आव्यूह सममित है। 2

(ङ) एक रैखिकतः आश्रित समुच्चय की कोई भी उपसमष्टि भी रैखिकतः आश्रित है। 2