BMTE-141

BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL) (BSCG)

Term-End Examination

December, 2022

BMTE-141 : LINEAR ALGEBRA

Time : 3 hours *Maximum Marks : 100*

Note : *There are **8** questions in this paper. Question no. **8** is **compulsory**. Do any **6** questions from questions no. **1** to **7**.*

---

1. (a) Define a skew-symmetric matrix and give an example. *2*

(b) Check whether the vectors (1, –1, 1), (1, 1, 0) and (2, 1, 3) are linearly independent. *3*

(c) Determine the equation of the plane determined by the vectors (1, 1, 0) and (0, 1, 1). *3*

(d) If the matrix of a linear transformation with respect to the standard basis is $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, then find the linear transformation. *3*

(e) Check whether the vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ is an eigenvector for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Find the corresponding eigenvalue. *2*

(f) Check whether the matrix $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ satisfies the polynomial $(x - 2)^2$. *2*

2. (a) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 3b & 2 \end{bmatrix}$ and $C = \begin{bmatrix} -11 & -8 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$. Are these values a, b such that AB = C ? If 'Yes', then find the values. If 'No', then justify your answer. *3*

(b) Let $B = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ and $B' = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. Find $M_{B'}^{B}$. *4*

(c) Find the signatures of the forms $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ and $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$. Are these forms equivalent ? Justify your answer. *3*

(d) Let V_1 be the subspace of $M_n(\mathbf{R})$ of all $n \times n$ symmetric matrices and V_2 be the subspace of all $n \times n$ skew-symmetric matrices. Show that $M_n(\mathbf{R}) = V_1 \oplus V_2$. *5*

3. (a) Obtain an orthonormal basis for $\mathbf{C}^3$ by applying Gram-Schmidt orthogonalisation process to $\{(i, 0, -i), (0, i, i), (i, i, i)\}$. *7*

(b) Check whether or not the matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ is diagonalisable. If it is, find a matrix P and a diagonal matrix D such that $P^{-1} A P = D$. If A is not diagonalisable, then find the adjugate of A. *6*

(c) Check whether $x^3 + x$ is in the linear span of $\{x^3 + x^2 + 1, \; 2x^2 + x\}$. *2*

4. (a) Show that :

(i) The diagonal entries of a hermitian matrix are real numbers.

(ii) The real part of the diagonal entries of a skew-hermitian matrix are zero. *4*

(b) Check whether the following system of equations can be solved using Cramer's rules :

$$x + y + z = 3$$
$$2x + y - z = 4$$
$$x + 3y + 2z = 2$$

If 'Yes', then solve the system of equations using Cramer's rule. If 'No', then solve the system of equations using Gaussian elimination. *5*

(c) Find the values of b_1, b_2 and b_3 for which the following system of equations is consistent : *6*

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = b_1$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = b_2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = b_3$$

5. (a) Consider the linear operator $T : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ defined by

$T(z_1, z_2, z_3) = (z_1 - iz_2 + z_3, iz_1 + 2z_2, z_1 + z_3)$.

Find T^*. Is T self-adjoint ? Justify your answer. *4*

(b) Let $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ be defined by $T(x, y) = (x, x + y, x - y)$ and $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ be defined by $S(x, y, z) = \left(x, \frac{y-z}{2}\right)$. Suppose that B_1 and B_2 are the standard bases of $\mathbf{R}^2$ and $\mathbf{R}^3$. Check that $[ToS]_{B_2}^{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1} \text{ o } [S]_{B_1}^{B_2}$. *8*

(c) Find the vector equation of the plane determined by the points $(1, -2, 1)$, $(1, 0, 1)$ and $(1, -1, 1)$. Also, check whether $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ lies on the plane. *3*

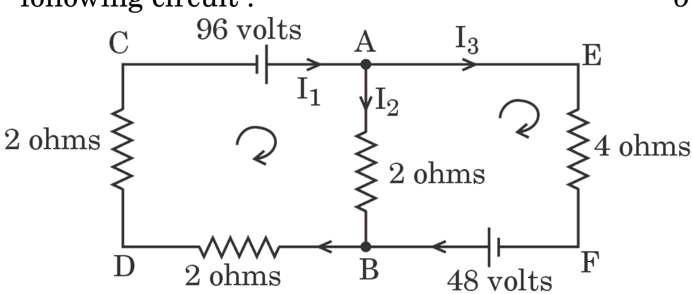
6. (a) Let A be an $n \times n$ real matrix, $n \geq 2$. Let $S = \{B \in M_n(\mathbf{R}) \mid BA = AB\}$. Show that S satisfies all the properties for being a real vector space with respect to addition and scalar multiplication of matrices. Further show that the dimension of S over **R** is greater than one. *8*

(b) Find the inverse of $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ using Cayley-Hamilton theorem. *5*

(c) Find the values $a, b \in \mathbf{C}$ for which the matrix $\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ a & b+i & 2+i \\ 1-i & 2-i & 1 \end{bmatrix}$ is hermitian. *2*

7. (a) Find the orthogonal canonical reduction of the form $x^2 - 2y^2 + z^2 + 2xy + 6yz$ and its principal axes. *6*

(b) Find the current flow in each branch of the following circuit : *6*



(c) Are there values $a \in \mathbf{C}$ for which the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & a \end{bmatrix}$ is unitary ? Justify your answer. *3*

8. Which of the following statements are *True* and which are *False* ? Justify your answer with a short proof or a counter example. *5×2=10*

(a) If A and B are upper triangular matrices, then $(AB)^t = A^t B^t$.

(b) If A and B are two matrices with the same Row-Reduced Echelon form, then A = B.

(c) The projection operator $pr_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ is surjective.

(d) If $A \in M_n(\mathbf{R})$ is diagonalisable, then A is a symmetric matrix.

(e) The function

$$\bullet : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} : \bullet\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2y_1y_2$$

is an inner product on $\mathbf{R}^2$.

विज्ञान स्नातक (सामान्य)
(बी.एस.सी.जी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2022

बी.एम.टी.ई.-141 : रैखिक बीजगणित

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *इस प्रश्न-पत्र में **8** प्रश्न हैं । प्रश्न संख्या **8** करना **अनिवार्य** है । प्रश्न संख्या **1** से **7** में से किन्हीं **6** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।*

1. (क) एक विषम-सममित आव्यूह परिभाषित कीजिए और एक उदाहरण दीजिए । *2*

(ख) जाँच कीजिए कि सदिश (1, –1, 1), (1, 1, 0) और (2, 1, 3) रैखिकत: स्वतन्त्र हैं । *3*

(ग) सदिश (1, 1, 0) और (0, 1, 1) द्वारा निर्धारित समतल का समीकरण निर्धारित कीजिए । *3*

(घ) मानक आधार के सापेक्ष एक रैखिक रूपान्तरण का आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ है, तो रैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए । *3*

(ङ) जाँच कीजिए कि सदिश $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ आव्यूह

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ का आइगेनसदिश है । संगत आइगेनमान ज्ञात कीजिए । 2

(च) जाँच कीजिए कि आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ बहुपद $(x-2)^2$ को संतुष्ट करता है । 2

2. (क) मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 3b & 2 \end{bmatrix}$ और

$C = \begin{bmatrix} -11 & -8 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$. क्या a और b के ऐसे मान हैं जिनके लिए $AB = C$? यदि 'हाँ', तो उन मानों को ज्ञात कीजिए । यदि 'ना', तो अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 3

(ख) मान लीजिए
$B = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ और
$B' = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. $M_{B'}^{B}$, ज्ञात कीजिए । 4

(ग) समघात
$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ और $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$
के चिह्नक ज्ञात कीजिए । क्या यह समघात तुल्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 3

(घ) मान लीजिए कि V_1, $M_n(\mathbf{R})$ के $n \times n$ सममित आव्यूहों की उपसमष्टि है और V_2, $n \times n$ विषम-सममित आव्यूहों की उपसमष्टि है । दिखाइए कि $M_n(\mathbf{R}) = V_1 \oplus V_2$ । 5

3. (क) ग्राम-श्मिट लांबिकीकरण प्रक्रिया $\{(i, 0, -i), (0, i, i), (i, i, i)\}$ पर लागू करके $\mathbf{C}^3$ का एक प्रसामान्य लांबिक आधार प्राप्त कीजिए । *7*

(ख) जाँच कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ विकर्णनीय है या नहीं । यदि विकर्णनीय है, तो एक आव्यूह P और एक विकर्ण आव्यूह D ज्ञात कीजिए जिससे $P^{-1} A P = D$. यदि A विकर्णनीय नहीं है, तो A का सहखण्डज ज्ञात कीजिए । *6*

(ग) जाँच कीजिए कि $x^3 + x$, $\{x^3 + x^2 + 1, \; 2x^2 + x\}$ की रैखिक विस्तृति में है । *2*

4. (क) दिखाइए कि

(i) हर्मिटी आव्यूह के विकर्ण अवयव वास्तविक संख्याएँ हैं ।

(ii) विषम-हर्मिटी आव्यूह के विकर्ण अवयव के वास्तविक भाग शून्य हैं । *4*

(ख) जाँच कीजिए कि क्या निम्नलिखित समीकरण निकाय को क्रेमर नियम लागू करके हल किया जा सकता है :

$$x + y + z = 3$$
$$2x + y - z = 4$$
$$x + 3y + 2z = 2$$

यदि 'हाँ', तो क्रेमर नियम से समीकरण निकाय को हल कीजिए । यदि 'नहीं', तो गाउसीय निराकरण से समीकरण निकाय को हल कीजिए । *5*

(ग) b_1, b_2 और b_3 के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए निम्नलिखित समीकरण निकाय संगत है : *6*

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = b_1$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = b_2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = b_3$$

5. (क) रैखिक संकारक, $T : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$, जो

$T(z_1, z_2, z_3) = (z_1 - iz_2 + z_3, iz_1 + 2z_2, z_1 + z_3)$

द्वारा परिभाषित है, लीजिए । T^* ज्ञात कीजिए । क्या T स्वसंलग्न है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *4*

(ख) मान लीजिए $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$,

$T(x, y) = (x, x + y, x - y)$ द्वारा परिभाषित है और

$S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $S(x, y, z) = (x, \frac{y-z}{2})$ द्वारा

परिभाषित है । मान लीजिए B_1 और B_2, $\mathbf{R}^2$ और $\mathbf{R}^3$ के मानक आधार हैं । जाँच कीजिए कि

$[ToS]_{B_2}^{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1} \text{ o } [S]_{B_1}^{B_2}$. *8*

(ग) बिन्दुओं (1, –2, 1), (1, 0, 1) और (1, –1, 1) द्वारा निर्धारित समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए । यह भी जाँच कीजिए कि क्या $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ इस समतल पर स्थित है । *3*

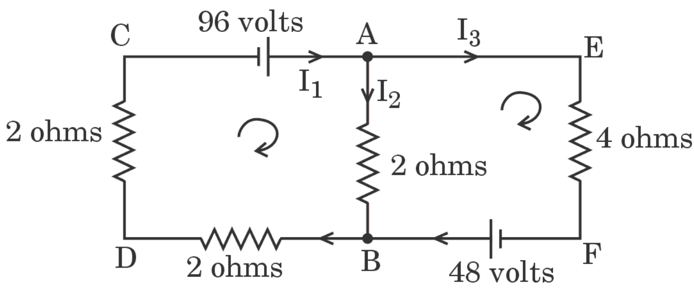
6. (क) मान लीजिए कि A एक $n \times n$ वास्तविक आव्यूह है, $n \geq 2$. मान लीजिए $S = \{B \in M_n(\mathbf{R}) \mid BA = AB\}$. आव्यूहों के योग एवं अदिश गुणन के सापेक्ष दिखाइए कि S में वास्तविक सदिश समष्टि होने के लिए जरूरी सभी गुण हैं । आगे, यह भी दिखाइए कि **R** पर S की विमा एक से बड़ी है । *8*

(ख) कैली-हैमिल्टन प्रमेय का प्रयोग करके आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए । *5*

(ग) **C** में वे मान a, b ज्ञात कीजिए जिनके लिए आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ a & b+i & 2+i \\ 1-i & 2-i & 1 \end{bmatrix}$ हर्मिटी है । *2*

7. (क) समघात $x^2 - 2y^2 + z^2 + 2xy + 6yz$ का लांबिक विहित समानयन और मुख्य अक्ष ज्ञात कीजिए । *6*

(ख) निम्नलिखित परिपथ की प्रत्येक शाखा में विद्युत धारा प्रवाह ज्ञात कीजिए : *6*



(ग) क्या $a \in \mathbf{C}$ के लिए ऐसे मान हैं जिनके लिए आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & a \end{bmatrix}$ ऐकिक है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *3*

8. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन *सत्य* हैं और कौन-से *असत्य* । अपने उत्तर की पुष्टि के लिए एक लघु उपपत्ति या प्रत्युदाहरण दीजिए । *5×2=10*

(क) यदि A और B उपरि त्रिभुजीय आव्यूह हैं, तो

$(AB)^t = A^t B^t$.

(ख) यदि आव्यूह A और B के पंक्ति-समानीत सोपानक रूप समान हैं, तो A और B समान हैं ।

(ग) प्रक्षेप संकारक $pr_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ आच्छादक है ।

(घ) यदि $A \in M_n(\mathbf{R})$ विकर्णनीय है, तो A सममित आव्यूह है ।

(ङ) फलन

$$\bullet : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} : \bullet\,((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2y_1y_2$$

$\mathbf{R}^2$ पर एक आंतर गुणनफल है ।