MTE-09

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2021

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Attempt **five** questions in all. Question no. **7** is **compulsory**. Attempt any **four** questions from questions no. **1** to **6**. Use of calculators is **not** allowed.*

1. (a) Evaluate : *3*

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^x$$

(b) Draw the graph of the function f, defined by

$$f(x) = |x - 6| + |5 - x| ; x \in [2, 8].$$ *3*

(c) Check whether or not the function f, defined on **R**

by $f(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin\left(\frac{1}{2x}\right), & \text{when } x \neq 0 \\ 0, & \text{when } x = 0, \end{cases}$

is derivable on **R**. If it is, is f′ continuous at x = 0 ? If f is not derivable, then define a derivable function on **R**. *4*

2. (a) Show that if $\frac{5}{3} < 2x < \frac{11}{3}$, then

$$x \in \left\{ y \in \mathbf{R} \;\middle|\; |y - \frac{4}{3}| < \frac{1}{2} \right\}.$$ *2*

(b) Prove that the complement of every closed set is open. *3*

(c) Test for convergence, the following series : *5*

(i) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \ldots$

(ii) $\frac{1}{3.4} + \frac{\sqrt{2}}{5.6} + \frac{\sqrt{3}}{7.8} + \ldots$

3. (a) Prove that the sequence $(f_n(x))$, where $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$ is not uniformly convergent in $[-2, 2]$. *5*

(b) Let f be a function, defined by

$$f(x) = \frac{1}{x + 3}, \; x \in [3, \infty[\; .$$

Check whether f is uniformly continuous or not on the interval of definition. *5*

4. (a) Check whether the sequence (a_n), where

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \text{ is}$$

convergent or not. *3*

(b) If the partition P_2 is a refinement of the partition P_1 of [a, b], then

$L(P_1, f) \leq L(P_2, f)$ and $U(P_2, f) \leq U(P_1, f)$.

Verify this result for the function $f(x) = 4 \cos x$, defined over $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, and for the partitions,

$P_1 = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\}$ and $P_2 = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$. *3*

(c) Let $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ be a function defined by $f(x) = \cos 2x$. Verify that f satisfies the conditions of the Inverse Function Theorem. Hence, what can you conclude about the continuity of f^{-1} ? *4*

5. (a) Show that the set $]-6, 8[\cap]-8, 4[$ is a neighbourhood of -5. *2*

(b) Check whether or not the function f, defined by $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{when x is rational} \\ 2, & \text{when x is irrational,} \end{cases}$ is discontinuous at every point in **R**. *4*

(c) Prove the Generalised Mean Value theorem. *4*

6. (a) Check whether the intervals [7, 10[and]3, 6] are equivalent or not. *2*

(b) Evaluate : *3*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{2r} \frac{2n^2}{(n + r)^3}$$

(c) Check whether or not the sequence $\left(n - \frac{1}{n}\right)$ is convergent. *2*

(d) Let ϕ and ψ be functions defined on $[-3, 5]$, such that both are continuous on $[-3, 5]$, derivable in $]-3, 5[$ and $\phi'(x) = \psi'(x) \; \forall \; x \in]-3, 5[$. Prove that

$$\phi(x) = \psi(x) + c \; \forall \; x \in [-3, 5],$$

where c is a real constant. *3*

7. Which of the following statements are true ? Give reasons for your answers. *5×2=10*

(a) $\{1, -1, 2, -2\}$ is a compact set.

(b) If (a_n) is convergent, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent.

(c) The sum of two discontinuous functions is always discontinuous.

(d) Every continuous function is differentiable.

(e) Every integrable function is monotonic.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2021

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न सं. **7 अनिवार्य** है । प्रश्न सं. **1** से **6** में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. (क) मान ज्ञात कीजिए : *3*

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^x$$

(ख) $f(x) = |x - 6| + |5 - x|$; $x \in [2, 8]$ से परिभाषित फलन f का ग्राफ बनाइए । *3*

(ग) जाँच कीजिए कि

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin\left(\frac{1}{2x}\right), & \text{जब } x \neq 0 \\ 0, & \text{जब } x = 0, \end{cases}$$

से $\mathbf{R}$ पर परिभाषित फलन f, $\mathbf{R}$ पर अवकलनीय है या नहीं । यदि यह अवकलनीय है, तो क्या $x = 0$ पर f' संतत है ? यदि f अवकलनीय नहीं है, तो $\mathbf{R}$ पर एक अवकलनीय फलन परिभाषित कीजिए । *4*

2. (क) दिखाइए कि यदि $\frac{5}{3} < 2x < \frac{11}{3}$ है, तो

$$x \in \left\{ y \in \mathbf{R} \,\middle|\, |y - \frac{4}{3}| < \frac{1}{2} \right\}.$$ *2*

(ख) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संवृत समुच्चय का पूरक एक विवृत समुच्चय होता है । *3*

(ग) निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण की जाँच कीजिए : *5*

(i) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \ldots$

(ii) $\frac{1}{3.4} + \frac{\sqrt{2}}{5.6} + \frac{\sqrt{3}}{7.8} + \ldots$

3. (क) सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $(f_n(x))$, जहाँ

$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$, $[-2, 2]$ में एकसमानतः अभिसारी नहीं है । *5*

(ख) मान लीजिए f एक फलन है जो

$$f(x) = \frac{1}{x+3}, \; x \in [3, \infty[$$

द्वारा परिभाषित है । जाँच कीजिए कि परिभाषा के अंतराल पर f एकसमानतः संतत है या नहीं । *5*

4. (क) जाँच कीजिए कि अनुक्रम (a_n), जहाँ

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n},$$

अभिसारी है या नहीं । *3*

(ख) यदि [a, b] के विभाजन P_1 का विभाजन P_2 एक अधिशोधन है, तो

$L(P_1, f) \leq L(P_2, f)$ और $U(P_2, f) \leq U(P_1, f)$.

इस परिणाम को $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ पर परिभाषित फलन $f(x) = 4 \cos x$ और विभाजनों $P_1 = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\}$ और $P_2 = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$ के लिए सत्यापित कीजिए । *3*

(ग) मान लीजिए $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ एक फलन है जो $f(x) = \cos 2x$ से परिभाषित है । सत्यापित कीजिए कि f व्युत्क्रम फलन प्रमेय की शर्तों को पूरा करता है । इससे, आप f^{-1} के सांतत्य के बारे में क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं ? *4*

5. (क) दिखाइए कि समुच्चय $]-6, 8[\cap]-8, 4[$, -5 का एक प्रतिवेश है । *2*

(ख) जाँच कीजिए कि

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{जब x परिमेय हो} \\ 2, & \text{जब x अपरिमेय हो} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f, $\mathbf{R}$ के प्रत्येक बिंदु पर असंतत है या नहीं । *4*

(ग) व्यापकीकृत मध्य मान प्रमेय को सिद्ध कीजिए । *4*

6. (क) जाँच कीजिए कि अंतराल [7, 10[और]3, 6] तुल्य हैं या नहीं । *2*

(ख) मान ज्ञात कीजिए : *3*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{2r} \frac{2n^2}{(n+r)^3}$$

(ग) जाँच कीजिए कि अनुक्रम $\left(n - \frac{1}{n}\right)$ अभिसारी है या नहीं । *2*

(घ) मान लीजिए ϕ और ψ, $[-3, 5]$ पर परिभाषित ऐसे फलन हैं कि दोनों $[-3, 5]$ पर संतत हैं, दोनों $]-3, 5[$ में अवकलनीय हैं और सभी $x \in]-3, 5[$ के लिए $\phi'(x) = \psi'(x)$ है । सिद्ध कीजिए कि सभी $x \in [-3, 5]$ के लिए

$$\phi(x) = \psi(x) + c,$$

जहाँ c एक वास्तविक अचर है । *3*

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं ? अपने उत्तरों के कारण दीजिए । *5×2=10*

(क) $\{1, -1, 2, -2\}$ एक संहत समुच्चय है ।

(ख) यदि (a_n) अभिसारी है, तो $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ भी अभिसारी है ।

(ग) दो असंतत फलनों का योगफल भी हमेशा असंतत होता है ।

(घ) प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय होता है ।

(ङ) प्रत्येक समाकलनीय फलन एकदिष्ट होता है ।