No. of Printed Pages : 15

MTE-10

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

(BDP)

Term-End Examination

December, 2021

MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt any **five** questions. All computations may be done upto 3 decimal places. Use of calculators is not allowed. Symbols have their usual meaning.*

1. (a) Find the inverse of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

using the Gauss-Jordan method. 5

(b) Determine a unique polynomial $f(x)$ of degree at most 3 such that $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = -1$, $f(x_1) = 2$, $f'(x_1) = 0$, where $x_1 - x_0 = h$. 5

2. (a) From the following lable, find the Lagrange's interpolating polynomial which agrees with the values of y at the given values of x. Hence find the value of y when $x = 2$: 5

x	y
1	4
3	10
4	20
5	80

(b) From the following table of values, find the Newton's form of interpolating polynomial approximating $f(x)$: 5

x	$f(x)$
-1	3
0	-6
3	39
6	822
7	1611

3. (a) Determine the order of convergence of the Newton-Raphson iterative method :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

for finding a simple root of the equation $f(x) = 0$. 5

(b) Find the truncation error and the order of the method :

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$$

Using this method and the Richardson's extrapolation, obtain the best value of $f'(2)$ from the following data : 5

x	$f(x)$
2	9
3	28
4	65
6	217
10	1001

4. (a) Compute four steps of Euler's method to solve numerically the IVP $y' = t + y,\ y(0) = 1$ with $h = 0.1$ in the interval $[0, 0.6]$. 5

(b) The velocity of a vehicle beginning from rest is given in the following table for part of the first hour. Using Simpon's $\frac{1}{3}$rd rule, find the distance travelled by the vehicle in this hour : 5

Time (min.)	Velocity (km/h)
10	80
20	60
30	70
40	75
50	70
60	80

5. (a) Solve the following system of linear equations using the Gauss elimination method, with partial pivoting : 4

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$5x_1 + 4x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$

(b) Suppose α and β are the roots of the equation $x^2 + ax + b = 0$. Consider a rearrangement of this equation as $x = -\frac{(ax+b)}{x}$. Show that the iteration scheme $x_{i+1} = -\frac{(ax_i + b)}{x_i}$ will converge near $x = \alpha$ when $|\alpha| > |\beta|$. 6

6. (a) Estimate the eigen values of the matrix $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ using Gerschgorin bounds. 5

(b) Use the LU decomposition method to solve the system of equations : 5

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$

$$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4$$

7. (a) Using the third order classical Runge-Kutta method, solve the initial value problem :

$$y' = \frac{y+2x}{y+3x},\ y(1) = 2$$

Find y (1.2) taking $h = 0.2$. 5

(b) Derive the Regula-Falsi method to find a simple root of the equation $f(x) = 0$. 5

MTE-10

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर. 2021

एम. टी. ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *किन्हीं* ***पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी अभिकलन* ***तीन*** *दशमलव स्थानों तक निकटित कर सकते हैं। कैल्कलेटरों के प्रयोग की अनमति नहीं है। प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।*

---

1. (क) गाउस-जॉर्डन विधि से आव्यह

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

का व्यत्क्रम ज्ञात कीजिए। 5

(ख) अधिकतम घात 3 वाला एक ऐसा बहपद $f(x)$ ज्ञात कीजिए जिसके लिए $f(x_0)=1$, $f'(x_0)=-1$, $f(x_1=2)$, $f'(x_1)=0$ हो, जहाँ $x_1-x_0=h$ है। 5

2. (क) निम्नलिखित तालिका से लैग्रांज अंतर्वेशन बहपद ज्ञात कीजिए जो x के दिए गए मानों पर y के मानों से मेल खाता हो। इस प्रकार, $x=2$ पर y का मान ज्ञात कीजिए : 5

x	y
1	4
3	10
4	20
5	80

(ख) नीचे दी गई मान तालिका से, $f(x)$ का सन्निकटन करने वाले अंतर्वेशी बहपद का न्यटन रूप ज्ञात कीजिए : 5

x	$f(x)$
– 1	3
0	– 6
3	39
6	822
7	1611

3. (क) समीकरण $f(x)=0$ का एक साधारण मल ज्ञात करने के लिए न्यटन–रैफ्सन पनरावत्ति विधि :

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

की अभिसरण कोटि निर्धारित कीजिए। 5

(ख) विधि

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)]$$

की रुंडन त्रटि और कोटि ज्ञात कीजिए। इस विधि और रिचर्डसन बहिर्वेशन का प्रयोग करके निम्नलिखित आँकडों से $f'(2)$ का सर्वोत्तम मान प्राप्त कीजिए : 5

x	$f(x)$
2	9
3	28
4	65
6	217
10	1001

4. (क) अंतराल $[0, 0.6]$ में $h=0.1$ के साथ आदि मान समस्या

$$y'=t+y,\ y(0)=1$$

को हल करने के लिए ऑयलर विधि के चार चरण ज्ञात कीजिए। 5

(ख) विरामावस्था से आरम्भ कर रही एक गाडी का वेग पहले घंटे के लिए निम्नलिखित तालिका में दिया गया है। सिम्पसन का $\frac{1}{3}$वाँ नियम प्रयोग करके, इस घंटे में गाडी द्वारा तय की गई दरी ज्ञात कीजिए : 5

समय (मिनट में)	वेग (किमी/घंटे में)
10	80
20	60
30	70
40	75
50	70
60	80

5. (क) आंशिक कीलकन के साथ, गाउस निराकरण विधि का प्रयोग करके निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए : 4

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$5x_1 + 4x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3.$$

(ख) मान लीजिए α और β समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ के मल हैं। इस समीकरण के पनर्विन्यास $x = -\frac{(ax+b)}{x}$ पर विचार कीजिए। दिखाइए कि पनरावत्ति विधि

$$x_{i+1} = -\frac{(ax_i + b)}{x_i}$$

$x = \alpha$ के निकट अभिसारित होती है, यदि $|\alpha| > |\beta|$ हो। 6

6. (क) गर्शगोरिन परिबंधों का प्रयोग करके आव्यह

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

के आइगेन मान आकलित कीजिए। 5

(ख) समीकरण निकाय

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$

$$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4$$

को LU वियोजन विधि से हल कीजिए। 5

7. (क) ततीय कोटि चिरप्रतिष्ठित रुंगे-कटटा विधि का प्रयोग करके, आदि मान समस्या :

$$y' = \frac{y + 2x}{y + 3x}, \; y(1) = 2$$

को हल कीजिए। $h = 0.2$ लेकर $y(1.2)$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

(ख) समीकरण $f(x) = 0$ का एक साधारण मल ज्ञात करने के लिए, रेगला–फाल्सी विधि की व्यत्पत्ति दीजिए। 5