

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME**  
**(BDP)**

**Term-End Examination**  
**December, 2021**

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS**  
**MTE-01 : CALCULUS**

*Time : 2 hours*

*Maximum Marks : 50*

*(Weightage : 70%)*

---

**Note :** Question no. 1 is **compulsory**. Attempt any **four** questions from question nos. 2 to 7. Use of calculators is **not** allowed.

---

---

1. Which of the following statements are *True* ?  
Give a short proof or a counter-example in support of your answers.  $5 \times 2 = 10$
- (a) If  $c$  is a point of the domain of a differentiable function  $f$ , such that  $f'(c) = 0$ , then  $f$  has a minimum at  $c$ .
- (b) The function  $f$ , defined by  $f(x) = \ln \left( \frac{1 - x^3}{1 + x^3} \right)$ ,  
is an even function.
- (c) The curve,  $y = \frac{3 - 2x}{1 + x^2}$  has no asymptote parallel to the axis of  $y$ .

(d)  $\int_0^3 |x - 2| dx = \frac{3}{2}$

(e)  $\ln(1 + x) > x \quad \forall x > 0$ .

2. (a) If  $y = (\cos^{-1} x)^2$ , then check whether or not the following is true : 4

$$(1 - x^2) y_{n+2} - (2n + 1) x y_{n+1} + n^2 y_n = 0$$

- (b) By dividing the interval  $[2, 10]$  into four

equal parts, find the approximate value of

$$\int_2^{10} \frac{dx}{x^2 + 4}, \text{ using the Simpson's Rule.} \quad 4$$

- (c) Find the maximum possible domain of the

function  $f$ , defined by  $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 3}$ . 2

3. (a) Find the ratio in which the length of the cycloid,  $x = a(\theta - \sin \theta)$ ,  $y = a(1 - \cos \theta)$ , ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) is divided by the line,  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ . 5

(b) Evaluate  $\int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2} dx$ . 5

4. (a) Verify Rolle's theorem for the function  $f$ , defined by  $f(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4)$ , on the interval  $[2, 4]$ . 3

(b) Let  $f$  be the function, defined on  $[-1, 1]$  by the following :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \text{ is rational} \\ -1, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

Find  $U(P, f)$  and  $L(P, f)$ . Hence, check whether  $f$  is integrable or not on  $[-1, 1]$ . 5

(c) Evaluate  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/4} - 1}{x^{1/3} - 1}$ . 2

5. Trace the curve,

$$y^2(1 + x^2) = x^2(1 - x^2),$$

clearly stating all the properties used for tracing it. 10

6. (a) For which values of  $m$ , is the function  $f$ , defined on  $[1, \infty[$  by

$$f(x) = \begin{cases} mx - 4, & 1 \leq x \leq 3 \\ 3 - \frac{x^2}{9}, & x > 3 \end{cases}$$

continuous at  $x = 3$  ? Are there more points in  $[1, \infty[$  where  $f$  is continuous ? Justify your answer. 3

- (b) Find the area between the curve,

$$x(x^2 + y^2) = 2(x^2 - y^2)$$

and its asymptote,  $x + 2 = 0$ . 4

- (c) If  $u_n = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos nx}{1 - \cos x} dx, n \geq 0$ , then prove

that  $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1}$ . 3

7. (a) Determine the angle of intersection between the curves,  $x^2 + 2xy - y^2 + 4x = 0$  and  $3y^3 - 8x - 16y + 8 = 0$  at the point  $(2, -2)$ . 3

- (b) If  $x = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$ ,  $y = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$ , then find  $\frac{dy}{dx}$  at  $t = \frac{\pi}{6}$ . 3

- (c) Evaluate  $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}$  and  $\int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{1 + \sqrt{\sin \theta}}}$ . 4

---

स्नातक उपाधि कार्यक्रम  
(बी.डी.पी.)  
सत्रांत परीक्षा  
दिसम्बर, 2021

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित  
एम.टी.ई.-01 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50  
(कुल का : 70%)

**नोट:** प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है । प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं ? अपने उत्तरों के पक्ष में एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रत्युदाहरण दीजिए ।  $5 \times 2 = 10$

(क) यदि एक अवकलनीय फलन  $f$  के प्रांत का एक बिंदु  $c$  इस प्रकार है कि  $f'(c) = 0$  है, तो फलन  $f$ ,  $c$  पर न्यूनतम होगा ।

(ख)  $f(x) = \ln \left( \frac{1 - x^3}{1 + x^3} \right)$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$  एक सम फलन है ।

(ग) वक्र  $y = \frac{3 - 2x}{1 + x^2}$  की  $y$ -अक्ष के समांतर कोई अनंतस्पर्शी नहीं है ।

$$(घ) \int_0^3 |x-2| dx = \frac{3}{2}$$

$$(ङ) \ln(1+x) > x \quad \forall x > 0.$$

2. (क) यदि  $y = (\cos^{-1} x)^2$  है, तो जाँच कीजिए कि निम्नलिखित

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0$$

सत्य है या नहीं।

4

- (ख) अंतराल  $[2, 10]$  को चार बराबर भागों में विभाजित

करते हुए, सिम्पसन नियम का प्रयोग करके  $\int_2^{10} \frac{dx}{x^2+4}$

का सन्निकटन मान ज्ञात कीजिए।

4

- (ग)  $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-3}$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$  का

अधिकतम संभव प्रांत ज्ञात कीजिए।

2

3. (क) वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें रेखा  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ,

चक्रज  $x = a(\theta - \sin \theta)$ ,  $y = a(1 - \cos \theta)$ ,

$(0 \leq \theta \leq 2\pi)$  की लंबाई को विभाजित करती है।

5

- (ख)  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

5

4. (क)  $f(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4)$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$  के लिए अंतराल  $[2, 4]$  पर रोल प्रमेय सत्यापित कीजिए । 3

- (ख) मान लीजिए कि फलन  $f$ , अंतराल  $[-1, 1]$  पर निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ -1, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

- $U(P, f)$  और  $L(P, f)$  ज्ञात कीजिए । इस प्रकार जाँच कीजिए कि  $f$ ,  $[-1, 1]$  पर समाकलनीय है या नहीं । 5

- (ग)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/4} - 1}{x^{1/3} - 1}$  का मान ज्ञात कीजिए । 2

5. वक्र  $y^2(1 + x^2) = x^2(1 - x^2)$  का आरेखण कीजिए और आरेखण में प्रयोग किए गए सभी गुणधर्मों को लिखिए । 10

6. (क) अंतराल  $[1, \infty[$  पर  $f(x) = \begin{cases} mx - 4, & 1 \leq x \leq 3 \\ 3 - \frac{x^2}{9}, & x > 3 \end{cases}$  द्वारा

- परिभाषित फलन  $f$ ,  $m$  के किन मानों के लिए  $x = 3$  पर संतत है ? क्या  $[1, \infty[$  में और बिंदुओं पर भी  $f$  संतत है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 3

(ख) वक्र  $x(x^2 + y^2) = 2(x^2 - y^2)$  और इसके अनंतस्पर्शी  $x + 2 = 0$  के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 4

(ग) यदि  $u_n = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos nx}{1 - \cos x} dx, n \geq 0$  है, तो सिद्ध कीजिए कि  $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1}$ . 3

7. (क) वक्रों  $x^2 + 2xy - y^2 + 4x = 0$  और  $3y^3 - 8x - 16y + 8 = 0$  का बिंदु  $(2, -2)$  पर प्रतिच्छेदन कोण ज्ञात कीजिए । 3

(ख) यदि  $x = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, y = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$  है, तो  $t = \frac{\pi}{6}$  पर  $\frac{dy}{dx}$  ज्ञात कीजिए । 3

(ग)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}$  और  $\int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{1 + \sqrt{\sin \theta}}}$  का मान ज्ञात कीजिए । 4