No. of Printed Pages : 12 **PHE-14**

BACHELOR OF SCIENCE (B. SC.)

Term-End Examination

December, 2020

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS—III

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : (*i*) *Attempt all questions.*

(*ii*) *The marks for each question are indicated against it.*

(*iii*) *Symbols have their usual meanings.*

---

1. Attempt any ***five*** parts : 2×5=10

(a) Determine the eigen values of $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Show that set of all matrices of order $m \times n$ is a group under the addition of matrices.

(c) Locate and name the singularities in the finite z-plane for the function of complex variable :

$$\frac{\ln(z + 3i)}{z^2}$$

(d) Show that $\oint_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$, where C is a circle of radius r.

(e) Obtain the Fourier sine transform of the function :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi / 2 \\ 0, & x > \pi / 2 \end{cases}$$

(f) Obtain the Laplace transform of $f(t) = pt^2$, where p is a constant.

(g) Using the generating function :

$$g(t, x) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n ,$$

calculate the values of Legendre polynomials $P_{2n}(0)$.

(h) Using the generating function for Hermite polynomials given by :

$$g(x, t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

establish the relation between $H_n(x)$ and $H_n(-x)$.

2. Attempt any ***two*** parts : 2×5=10

(a) Verify that the Pauli spin matrices :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

and $$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

are unitary.

(b) Calculate the eigen values of M^{-1}, where :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

given that M is a non-singular matrix.

(c) Express the following quadratic form as product of matrices :

$$2x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 4yz + 6zx + 8xy$$

3. Attempt any *one* part : 10

(a) Using the method of residues, show that :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

(b) Using the method of residues, prove that :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a \pm b\cos\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a \pm b\sin\theta}$$

$$= \frac{2\pi}{\left(a^2 - b^2\right)^{1/2}}$$

for $a > |b|$.

4. Attempt any ***two*** parts : 2×5=10

(a) Determine the Fourier transform of the function :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -a < x < a \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(b) Obtain the inverse Laplace transform of $\mathrm{F}(s) = \dfrac{s+15}{s^2-9}$.

(c) Show that the Fourier transform of the derivative of a function is given by :

$$\mathrm{FT}\left\{\frac{d f(x)}{dx}\right\} = ikg(k)$$

where $g(k)$ is the Fourier transform of the function $f(x)$.

5. Attempt any *one* part :

(a) (i) Expand $f(x) = x^2$ in the series of the form $\sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(x)$, where $P_k(x)$ are the Legendre polynomials and determine the values of $A_k\,(k = 0, 1, 2)$. Given that :

$$P_0(x) = 1,\; P_1(x) = x$$

and $P_2(x) = \dfrac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$. 5

(ii) Using the generating function of Bessel functions :

$$g(x, t) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

show that $J_0(0) = 1$ and $J_n(0) = 0$ for $n \neq 0$. 5

(b) Two operators : 10

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\xi + \frac{d}{d\xi}\right]$$

$$a^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\xi - \frac{d}{d\xi}\right]$$

(where $\xi = \sqrt{\frac{mw}{\hbar}}\, x$) operate on the harmonic oscullator wave function

$$\psi_n = N_n e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi)$$

where $N_n = \left[\left(\frac{mw}{\hbar}\right)^{1/2} \frac{1}{2^n n!\, \pi^{1/2}}\right]^{\frac{1}{2}}$.

show that :

$$a\psi_n = \sqrt{n}\, \psi_{n-1}$$

and $a^+ \psi_n = \sqrt{n+1}\, \psi_{n+1}$

given that :

$$\frac{dH_n}{d\xi} = 2nH_{n-1}(\xi).$$

PHE-14

विज्ञान स्नातक (बी. एस.-सी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2020

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ—III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(ii) प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

(iii) प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. कोई ***पाँच*** भाग कीजिए : $5 \times 2 = 10$

(क) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ के आइगेन मान प्राप्त कीजिए।

(ख) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह योग के अधीन कोटि $m \times n$ वाले सभी आव्यूहों का समुच्चय एक समूह होता है।

(ग) सम्मिश्र चर के फलन $\dfrac{\ln(z + 3i)}{z^2}$ की परिमित z-समतल में विचित्रताओं का निर्धारण कीजिए और उनके नाम बताइए।

(घ) सिद्ध कीजिए कि $\oint_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i,$ जहाँ C त्रिज्या r का एक वृत्त है।

(ङ) निम्नलिखित फलन का फूरिये साइन रूपांतर प्राप्त कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi / 2 \\ 0, & x > \pi / 2 \end{cases}$$

(च) $f(t) = pt^2$ का लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए, जहाँ p एक स्थिरांक है।

(छ) जनक फलन

$$g(t, x) = \left(1 - 2xt + t^2\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

का उपयोग कर लेजान्ड्रे बहुपद $P_{2n}(0)$ का मान परिकलित कीजिए।

(झ) हर्मिट बहुपदों के जनक फलन :

$$g(x, t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

का उपयोग कर $H_n(x)$ और $H_n(-x)$ के बीच संबंध स्थापित कीजिए।

2. कोई **दो** भाग कीजिए : $2 \times 5 = 10$

(क) सत्यापित कीजिए कि पाउली स्पिन आव्यूह :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

एवं $$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ऐकिक हैं।

(ख) M^{-1} के आइगेन मान परिकलित कीजिए, जहाँ :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

दिया है कि M एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

(ग) निम्नलिखित द्विघाती समघात को आव्यूहों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

$$2x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 4yz + 6zx + 8xy$$

3. कोई **एक** भाग कीजिए : 10

(क) अवशिष्ट विधि का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

(ख) अवशिष्ट विधि का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि $a > |b|$ के लिए :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a \pm b\cos\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a \pm b\sin\theta}$$

$$= \frac{2\pi}{\left(a^2 - b^2\right)^{1/2}}$$

4. कोई ***दो*** भाग कीजिए : 2×5=10

(क) फलन :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -a < x < a \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

का फूरिये रूपांतर प्राप्त कीजिए।

(ख) फलन $F(s) = \dfrac{s+15}{s^2 - 9}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए।

(ग) सिद्ध कीजिए कि फलन के अवकलज का फूरिये रूपांतर निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है :

$$\mathrm{FT}\left\{\frac{d\,f(x)}{dx}\right\} = ikg(k)$$

जहाँ $g(k)$, फलन $f(x)$ का फूरिये रूपांतर है।

5. कोई **एक** भाग कीजिए : 10

(क) (i) $f(x) = x^2$ का प्रसार $\sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(x)$ के रूप की श्रेणी में कीजिए, जहाँ $P_k(x)$ लेजेन्ड्रे बहुपद हैं और $A_k\ (k = 0, 1, 2)$ के मान परिकलित कीजिए। दिया है : 5

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x$$

और $$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)।$$

(ii) बेसल फलन के जनक फलन :

$$g(x, t) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

का उपयोग कर $n \neq 0$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $J_0(0) = 1$ और $J_n(0) = 0$ है। 5

(ख) दो संकारक

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\xi + \frac{d}{d\xi}\right]$$

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\xi - \frac{d}{d\xi}\right]$$

(जहाँ $\xi = \sqrt{\frac{mw}{\hbar}}\, x$) प्रसंवादी दोलक तंरग फलन

$$\psi_n = N_n e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi)$$

पर संक्रिया करते हैं तथा

$$\mathrm{N}_n = \left[\left(\frac{mw}{\hbar}\right)^{1/2} \frac{1}{2^n n!\,\pi^{1/2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$a\psi_n = \sqrt{n}\,\psi_{n-1}$$

तथा $$a^+\,\psi_n = \sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}$$

दिया है :

$$\frac{d\mathrm{H}_n}{d\xi} = 2n\mathrm{H}_{n-1}(\xi)$$