BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

February, 2021

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Attempt* ***five*** *questions in all. Question no.* ***1*** *is* ***compulsory****. Attempt any* ***four*** *questions from questions no.* ***2*** *to* ***7****.*

1. Are the following statements *True* or *False* ? Give proper reason for your answer. *5×2=10*

(a) The function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ defined by $f(x) = |x - 1| + |3 - x|$ is differentiable at $x = 4$.

(b) Every bounded sequence is convergent.

(c) 2 is a limit point of the interval [1, 4].

(d) The function, $f(x) = [x] - x$, is not integrable in [0, 3], where [x] denotes the greatest integer function.

(e) The function f given by

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, & \text{when } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

is continuous in the closed interval, [– 1, 1].

2. (a) Find

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x \sec^2 x - x}{x^3}.$$ *3*

(b) Examine whether the equation, $x^3 - 11x + 9 = 0$ has a real root in the interval, [– 1, 2]. *3*

(c) Find whether the following series are convergent or not : *4*

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n - 1}{7^n}$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 - 3}}{\sqrt{n}}$$

3. (a) Does the sequence $(3 + (-1)^n)$ converge to 2 ? Justify. *2*

(b) Show that

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x - 3}{x + 1} \right)^x = e^{-4}.$$ *3*

(c) Show that the sequence (f_n) where $f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$, $x \in [2, \infty[$ is uniformly convergent in $[2, \infty[$. *5*

4. (a) Using principle of induction, prove that 64 is a factor of $3^{2n+2} - 8n - 9$, $\forall\ n \in \mathbf{N}$. *3*

(b) Find

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{2}{(2n+2)^2} + \frac{3}{(2n+3)^2} + \ldots + \frac{3}{25n} \right]. \quad 3$$

(c) Show that the function f defined by $f(x) = \frac{1}{x^2}$ is uniformly continuous on $[a, \infty[$, $a > 0$. *4*

5. (a) Test the series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3}{5n - 2}$ for absolute and conditional convergence. *4*

(b) Sketch the graph of the function, f defined by

$$f(x) = |x - 3| + [x], \quad x \in [2, 4]$$

where $[x]$ denotes the greatest integer function. *3*

(c) Prove that $\lim_{x \to -5} \frac{1}{(x+5)^2} = \infty$, with proper justification. *3*

6. (a) Prove that the union of a finite number of open sets is open. *3*

(b) Find the local maximum and the local minimum values of the function

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5.$$ *4*

(c) For the function f defined by $f(x) = 3x - 2$, over [0, 1], verify $L(P, f) \leq U(P, f)$ where the partition P is $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$. *3*

7. (a) Examine the following series for convergence : *2*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{2n+3}\right)^n$$

(b) Show that the function f defined on [0, 1] by

$$f(x) = (-1)^{n-1} \text{ for } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$ is integrable on [0, 1]. *3*

(c) Show that $R_n(x)$, the Lagrange's form of remainder in the Maclaurin series expansion of cos 3x tends to zero as $n \to \infty$. Hence obtain its infinite Maclaurin expansion. *5*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

फरवरी, 2021

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न सं. **1** **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. **2** से **7** में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।*

---

1. क्या निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* ? अपने उत्तर के लिए उचित कारण दीजिए । *5×2=10*

(क) $f(x) = |x - 1| + |3 - x|$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x = 4$ पर अवकलनीय है ।

(ख) प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम अभिसारी है ।

(ग) अन्तराल $[1, 4]$ का सीमा-बिन्दु 2 है ।

(घ) फलन $f(x) = [x] - x$, $[0, 3]$ में समाकलनीय नहीं है, जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है ।

(ङ) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, & \text{जब } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$

द्वारा दिया गया फलन f संवृत्त अन्तराल $[-1, 1]$ में संतत है ।

2. (क) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x \sec^2 x - x}{x^3}$ ज्ञात कीजिए । *3*

(ख) जाँच कीजिए कि समीकरण $x^3 - 11x + 9 = 0$ का अन्तराल $[-1, 2]$ में वास्तविक मूल है या नहीं । *3*

(ग) ज्ञात कीजिए निम्नलिखित श्रेणी अभिसारी है या नहीं : *4*

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{7^n}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2-3}}{\sqrt{n}}$

3. (क) क्या अनुक्रम $(3 + (-1)^n)$, 2 की ओर अभिसरित होता है ? पुष्टि कीजिए । *2*

(ख) दिखाइए कि

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^x = e^{-4}$$ *3*

(ग) दिखाइए कि अनुक्रम (f_n), $[2, \infty[$ में एकसमानत: अभिसारी है, जहाँ $f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$, $x \in [2, \infty[$. *5*

4. (क) आगमन नियम से सिद्ध कीजिए कि 64, $3^{2n+2} - 8n - 9$, $\forall\ n \in \mathbf{N}$ का गुणक है । *3*

(ख) $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{2}{(2n+2)^2} + \frac{3}{(2n+3)^2} + ... + \frac{3}{25n} \right]$

ज्ञात कीजिए । *3*

(ग) दिखाइए कि $f(x) = \frac{1}{x^2}$ द्वारा परिभाषित फलन f, $[a, \infty[$, $a > 0$ पर एकसमानत: संतत है । *4*

5. (क) निरपेक्ष और सप्रतिबंध अभिसरण के लिए श्रेणी $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3}{5n-2}$ की जाँच कीजिए । *4*

(ख) $f(x) = |x - 3| + [x]$, $x \in [2, 4]$ द्वारा परिभाषित फलन f का ग्राफ बनाइए, जहाँ [x] महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है । *3*

(ग) उचित पुष्टि सहित सिद्ध कीजिए कि

$$\lim_{x \to -5} \frac{1}{(x+5)^2} = \infty .$$ *3*

6. (क) सिद्ध कीजिए कि परिमित संख्या में विवृत्त समुच्चयों का सम्मिलन विवृत्त होता है । *3*

(ख) फलन $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ के स्थानीय उच्चिष्ठ और स्थानीय निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए । *4*

(ग) $[0, 1]$ पर $f(x) = 3x - 2$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए सत्यापित कीजिए $L(P, f) \leq U(P, f)$ जहाँ विभाजन P, $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ है । *3*

7. (क) अभिसरण के लिए निम्नलिखित श्रेणी की जाँच कीजिए : *2*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{2n+3}\right)^n$$

(ख) दिखाइए कि $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$ के लिए

$f(x) = (-1)^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ द्वारा $[0, 1]$ पर परिभाषित फलन f, $[0, 1]$ पर समाकलनीय है । *3*

(ग) दिखाइए कि $R_n(x)$, $\cos 3x$ के मैक्लारिन श्रेणी प्रसार का लंग्राज रूप का अवशेष, शून्य की ओर प्रवृत्त करता है, जब $n \to \infty$. इस तरह इसका अपरिमित मैक्लारिन प्रसार प्राप्त कीजिए । *5*