

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)****Term-End Examination****February, 2021****ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage : 70%)*

Note : Question no. 7 is **compulsory**. Answer any **four** questions from questions no. 1 to 6. Symbols have their usual meanings. Use of calculator is **not** allowed.

1. (a) Frequency distribution of marks of the students of a class in Mathematics is given below :

Marks	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
No. of Students	10	15	25	20	10

- (i) Calculate the mean and standard deviation of these marks.
- (ii) If these students got mean marks as 25 with a standard deviation 15 in the other subject Statistics, then find the subject which is more consistent.

6

- (b) Find the maximum likelihood estimator of the parameter α of a population with the density function $f(x, \alpha) = \frac{2}{\alpha^2} (\alpha - x)$, $0 < x < \alpha$, for a sample of unit size. Show that the obtained estimate of α is biased. 4

2. (a) In a certain distribution, the first four central moments are 0, 16, -64 and 162, respectively. Calculate b_1 and b_2 and state whether the distribution is leptokurtic or platykurtic. 2

- (b) Two candidates appear in an interview for two vacancies for the same post. The probability of the first candidate's selection is $1/7$ and that of the second candidate's selection is $1/5$. Find the probability that

- (i) both of them will be selected.
 (ii) at least one of them will be selected. 3

- (c) Suppose two random variables X and Y have the joint p.m.f. $f(x, y)$ given by the following table :

X \ Y	0	1
1	0.20	0.15
2	0.20	0.30
3	0.05	0.10

- (i) Obtain the marginal p.m.fs of X and Y.
 (ii) Find $P[X = 2/Y = 1]$.
 (iii) Are the events $[X = 2]$ and $[Y = 1]$ independent? Justify.

5

3. (a) Let X_1, X_2, \dots, X_n be a random sample from $N(\mu, \sigma^2)$. Find the mean and variance of

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

4

- (b) Let X be a random variable with p.m.f. given by the following table :

x	- 2	- 1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

Find $E(X)$ and $E(X^2)$.

2

- (c) The distribution of weekly incomes of 500 workers may be assumed to be normal with mean of ₹ 2,000 and standard deviation of ₹ 200. Estimate the number of workers with incomes

- (i) exceeding ₹ 2,300 per week.
 (ii) between ₹ 1,800 and ₹ 2,300 per week.

4

[You may like to use the values $P[0 \leq z \leq 1.5] = 0.4332$, $P[0 \leq z \leq 1] = 0.3413$, $P[0 \leq z \leq 2] = 0.4772]$

4. (a) A random variable X has the following distribution function :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ for } x < -1 \\ \frac{x+2}{4} & , \text{ for } -1 \leq x < 1 \\ 1 & , \text{ for } x \geq 1 \end{cases}$$

Sketch the graph of F and compute

$$P\left[-\frac{1}{2} < X \leq \frac{1}{2}\right]. \quad 2$$

- (b) Calls arriving at a switchboard follow an exponential distribution with parameter $\lambda = 3$ per hour. What is the probability that the waiting time for a call is

(i) at least 12 minutes ?

(ii) not more than 9 minutes ? 3

- (c) Five unbiased dice were thrown 96 times and the number of times 4, 5 or 6 was obtained is given in the following table :

No. of dice showing 4, 5 or 6	0	1	2	3	4	5
Frequency	1	10	24	35	18	8

At 5% level of significance, test whether this data comes from a binomial distribution. 5

[You may like to use the following values :

$$\chi_{5, 0.05}^2 = 11.05, \chi_{6, 0.05}^2 = 12.59, \chi_{7, 0.05}^2 = 14.07]$$

5. (a) Suppose the random variables X and Y have the joint probability density function

$$f_{X, Y}(x, y) = \begin{cases} 6(1 - x - y); & \text{if } x > 0, y > 0, x + y < 1 \\ 0 & ; \text{ otherwise} \end{cases}$$

- (i) Find the marginal densities of X and Y.
- (ii) Are X and Y independent? Justify.
- (iii) $P[0 < X < \frac{1}{2}]$. 5

- (b) If a random variable X has geometric distribution with p.m.f.

$$P[X = x] = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad x = 1, 2, 3, \dots, \text{ then find its}$$

mean. 3

- (c) The probability that a person recovers from a serious disease is 0.40. Find the probability that at least one of the 4 persons admitted to a hospital will survive. 2

6. (a) The output and related production cost of a firm are given below :

Output (in tons)	Production cost (in '000 ₹)
1	2
2	3
4	4
8	7
6	6
5	5
8	8
9	8
6	6
1	1

- (i) Construct a scatter diagram for the given data.
- (ii) Find the equation of the regression line by taking production cost as dependent variable.
- (iii) Using this equation of regression line, predict the firm's production costs if they decide to produce 4 tons per month. 6

(b) In a bolt factory, machines A, B and C manufacture 25%, 35% and 40% of the total product respectively. Out of these 5%, 4% and 2% produced by machines A, B and C respectively are defective bolts. A bolt is drawn at random from the lot and is found to be defective. What is the probability that it was manufactured by machine A ?

4

7. Which of the following statements are *True* or *False* ? Give a short proof or a counter-example in support of your answer. $5 \times 2 = 10$

(i) If a random variable U has the t-distribution with n degrees of freedom, then U^2 has the normal distribution with mean 0 and variance 1.

(ii) If two variables are independent, then the coefficient of correlation between them is 1.

(iii) The expectation of the number on an unbiased dice when thrown is $\frac{7}{2}$.

- (iv) If X and Y are two independent random variables with $\text{Var}(X) = 25$ and $\text{Var}(Y) = 15$, then $\text{Var}(X - Y)$ will be 10.
- (v) If A and B are independent events with $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$, then $P(A \cap B) = 0.7$.
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
फरवरी, 2021

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-11 : प्रायिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50
(भारिता : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 7 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। संकेतों का सामान्य अर्थ है। कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) एक कक्षा के छात्रों का गणित विषय में प्राप्त अंकों का बारंबारता बंटन निम्नलिखित है :

अंक	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
छात्रों की संख्या	10	15	25	20	10

(i) इन अंकों का माध्य और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि इन छात्रों के एक अन्य विषय सांख्यिकी के अंकों का माध्य 25 और मानक विचलन 15 है, तो वह विषय बताइए जो कि अधिक संगत है।

6

(ख) इकाई आकार वाले एक प्रतिदर्श, जो α प्राचल और घनत्व फलन $f(x, \alpha) = \frac{2}{\alpha^2}(\alpha - x)$, $0 < x < \alpha$ से लिया है, का अधिकतम संभावित आकलक ज्ञात कीजिए। यह भी दर्शाइए कि α का प्राप्त आकलक अभिनत है।

4

2. (क) एक विशेष बंटन के पहले चार केंद्रीय आघूर्ण क्रमशः 0, 16, -64 और 162 हैं। b_1 और b_2 परिकलित कीजिए और बताइए कि बंटन तुंगककुदी या सपाटककुदी में से क्या है।

2

(ख) एक ही पद की दो रिक्तियों के लिए दो उम्मीदवार इंटरव्यू देते हैं। पहले उम्मीदवार के चयन की प्रायिकता $1/7$ और दूसरे उम्मीदवार के चयन की प्रायिकता $1/5$ है। निम्नलिखित प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

(i) दोनों का चयन होगा।

(ii) उन दोनों में से कम-से-कम एक का चयन होगा।

3

(ग) दो यादृच्छिक चरों X और Y का संयुक्त p.m.f. $f(x, y)$ निम्नलिखित सारणी में दिया गया है :

X \ Y	0	1
1	0.20	0.15
2	0.20	0.30
3	0.05	0.10

- (i) X और Y के उपांत p.m.f. प्राप्त कीजिए ।
(ii) $P[X = 2/Y = 1]$ ज्ञात कीजिए ।
(iii) क्या घटनाएँ $[X = 2]$ और $[Y = 1]$ स्वतंत्र हैं ?
स्पष्टीकरण दीजिए ।

5

3. (क) मान लीजिए X_1, X_2, \dots, X_n , $N(\mu, \sigma^2)$ से लिया गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है ।

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ का माध्य और प्रसरण}$$

ज्ञात कीजिए ।

4

- (ख) मान लीजिए कि X निम्नलिखित सारणी द्वारा दिया गया p.m.f. वाला एक यादृच्छिक चर है :

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

$E(X)$ और $E(X^2)$ ज्ञात कीजिए ।

2

- (ग) 500 कर्मचारियों की साप्ताहिक आमदनी माध्य ₹ 2,000 और मानक विचलन ₹ 200 वाले प्रसामान्य बंटन में है । निम्नलिखित आमदनी वाले कर्मचारियों की संख्या आकलित कीजिए :

(i) ₹ 2,300 प्रति सप्ताह से अधिक ।

(ii) ₹ 1,800 और ₹ 2,300 प्रति सप्ताह के बीच ।

4

[आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं :

$$P[0 \leq z \leq 1.5] = 0.4332, P[0 \leq z \leq 1] = 0.3413,$$

$$P[0 \leq z \leq 2] = 0.4772]$$

4. (क) एक यादृच्छिक चर X का बंटन फलन निम्नलिखित है :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -1 \text{ के लिए} \\ \frac{x+2}{4} & , \quad -1 \leq x < 1 \text{ के लिए} \\ 1 & , \quad x \geq 1 \text{ के लिए} \end{cases}$$

F का ग्राफ आरेखित कीजिए और $P\left[-\frac{1}{2} < X \leq \frac{1}{2}\right]$ ज्ञात कीजिए ।

2

(ख) एक स्विचबोर्ड पर कॉल $\lambda = 3$ प्रति घंटा प्राचल वाले चरघातांकीय बंटन में आती हैं । एक कॉल के निम्नलिखित प्रतीक्षा कालों के लिए प्रायिकता क्या होगी ?

(i) कम-से-कम 12 मिनट

(ii) 9 मिनट से अधिक नहीं

3

(ग) पाँच अनभिन्नत पासों को 96 बार फेंका गया और पासों पर 4, 5 या 6 आने की संख्या को निम्नलिखित सारणी में दिया गया है :

4, 5 या 6 दर्शाने वाले पासों की संख्या	0	1	2	3	4	5
बारंबारता	1	10	24	35	18	8

5% सार्थकता स्तर पर परीक्षण कीजिए कि ये आंकड़े द्विपद बंटन से प्राप्त होते हैं या नहीं ।

5

[आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं :

$$\chi_{5, 0.05}^2 = 11.05, \chi_{6, 0.05}^2 = 12.59, \chi_{7, 0.05}^2 = 14.07]$$

5. (क) मान लीजिए कि यादृच्छिक चर X और Y का संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन निम्नलिखित है :

$$f_{X, Y}(x, y) = \begin{cases} 6(1 - x - y); & \text{यदि } x > 0, y > 0, x + y < 1 \\ 0 & ; \quad \text{अन्यथा} \end{cases}$$

निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

(i) X और Y के उपांत घनत्व ।

(ii) क्या X और Y स्वतंत्र हैं ? स्पष्टीकरण दीजिए ।

(iii) $P[0 < X < \frac{1}{2}]$.

5

- (ख) यदि एक यादृच्छिक चर X , निम्नलिखित p.m.f. वाला एक ज्यामितिय बंटन है ;

$$P[X = x] = \left(\frac{1}{2}\right)^x, x = 1, 2, 3, \dots$$

तो इसका माध्य ज्ञात कीजिए ।

3

- (ग) वह प्रायिकता कि एक व्यक्ति एक गंभीर रोग के बाद स्वस्थ हो जाता है, 0.40 है । वह प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि एक अस्पताल में भर्ती हुए 4 व्यक्तियों में से कम-से-कम एक स्वस्थ हो जाएगा ।

2

6. (क) एक फर्म का उत्पादन और उससे संबंधित उत्पादन लागत नीचे दी गई है :

उत्पादन (टन में)	उत्पादन लागत ('000 ₹ में)
1	2
2	3
4	4
8	7
6	6
5	5
8	8
9	8
6	6
1	1

- (i) इन आंकड़ों के लिए प्रकीर्ण आरेख खींचिए ।
- (ii) उत्पादन लागत को आश्रित चर लेकर समाश्रयण रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए ।
- (iii) इस समाश्रयण रेखा के समीकरण का प्रयोग करके फर्म की उत्पादन लागत ज्ञात कीजिए यदि फर्म 4 टन प्रति माह का उत्पादन तय करती है ।

6

(ख) एक बोल्ट फैक्टरी में, मशीनें A, B और C कुल उत्पाद का क्रमशः 25%, 35% और 40% उत्पादन करती हैं। इनमें से मशीनों A, B और C द्वारा बनाए गए उत्पादों में से क्रमशः 5%, 4% और 2% बोल्ट खराब हैं। एक लॉट में से एक बोल्ट यादृच्छिक निकाला जाता है और खराब पाया जाता है। वह प्रायिकता क्या होगी कि वह मशीन A द्वारा बना है ?

4

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं अथवा कौन-से असत्य ? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति या प्रत्युदाहरण दीजिए।

$5 \times 2 = 10$

- (i) यदि एक यादृच्छिक चर U , स्वातंत्र्य कोटि n वाला t -बंटन है, तो U^2 माध्य 0 और प्रसरण 1 वाला प्रसामान्य बंटन होगा।
- (ii) यदि दो चर स्वतंत्र हैं, तो उनके बीच सहसंबंध गुणांक 1 होगा।
- (iii) एक अनभिन्नत पासे को फेंकने पर आयी संख्याओं की प्रत्याशा $\frac{7}{2}$ होगी।

(iv) यदि X और Y दो स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं और $\text{Var}(X) = 25$ और $\text{Var}(Y) = 15$ है, तो $\text{Var}(X - Y) = 10$ होगा ।

(v) यदि A और B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं और $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$ है, तो $P(A \cap B) = 0.7$ होगा ।
