BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

February, 2021

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Answer any **five** questions. All computations may be done upto 3 decimal places. Use of calculators is **not** allowed. Symbols have their usual meanings.*

1. (a) Without computing the eigenvalues, prove that the eigenvalues of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

satisfy the inequality $0 \leq \lambda \leq 10$. *4*

(b) If the Newton-Raphson method is used to estimate a root of $f(x) = x^3 - 2$ starting with $x_0 = 2$, then find the least n such that $|x_{n+1} - x_n| < 0{\cdot}05$. *4*

(c) Evaluate $\int_1^2 \frac{x-1}{x+1}\,dx$ using Simpson's $\frac{1}{3}$ rd rule with 3 sub-intervals. *2*

2. (a) Solve the system of linear equations

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1$$

using the LU decomposition method. *5*

(b) Find the Newton's divided difference interpolating polynomial for the following data :

x	1	3	5	6
f(x)	– 3	1	2	4

Also, estimate the value of f(2). *5*

3. (a) Solve the following system of linear equations using the Gauss elimination method with partial pivoting : *4*

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$5x_1 + 4x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$

(b) Estimate the value of f(2) from the data given in Q. 2(b), using Lagrange's interpolation. *3*

(c) Find the value of f(3) and f′(3) for the polynomial

$$f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 2$$

using Horner's method. *3*

4. (a) Using Gauss-Jordan method, find the inverse of the matrix *4*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) A numerical differential formula for finding $f'''(x_k)$ is given by

$$f_k''' = \frac{1}{4h^3} [2 (f_{k+2} - f_{k-2}) - 4 (f_{k+1} - f_{k-1})],$$

where $f(x_{k-n}) = f(x_k - nh)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Using the Taylor's series expansion, find the truncation error of the formula. *6*

5. (a) Perform three iterations of the power method to find the largest eigenvalue in magnitude and the corresponding eigenvector of the following matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Take $x_0 = (1, 0, 0)$. *5*

(b) Using Euler's method, find the approximate value of $y(0{\cdot}2)$ for the initial value problem

$$y' = x^2 + y, \ \ y(0) = 1,$$

with the step size $h = 0{\cdot}1$. *2*

(c) Show by induction that

$$\Delta^n(e^x) = (e^h - 1)^n \, e^x, \ \ \forall \ n \geq 1.$$ *3*

6. (a) Compute $\int_1^2 f(x)\,dx$ using Romberg integral technique on the approximate integrals evaluated by the trapezoidal rule taking $h = 0{\cdot}5$ and $h = 0{\cdot}25$. The tabulated values of $f(x)$ are given below : *5*

x	1·0	1·25	1·5	1·75	2·0
f(x)	6	4·6	5·2	3·9	8·5

(b) If $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, where $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, then the value of the second order divided difference $f[1, 2, 3]$ is $\alpha + \beta + \gamma$. Is this statement true ? Justify your answer. *2*

(c) Show that the fixed point iteration scheme

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \; n = 0, 1, 2, ...,$$

where $\phi(x) = 4 + \frac{1}{3} \sin 2x$,

converges for any value of the initial approximation $x_0 \in \mathbf{R}$. *3*

7. (a) Using fourth order Taylor series method, find y(1·2) from the initial value problem

$$y' = x - \frac{y}{x}, \; y(1) = 1.$$

Take h = 0·2. *5*

(b) Find the interval of unit length that contains the smallest positive root of the equation $x^3 - 6x^2 + 1 = 0$. Starting with this interval, find an interval of length 0·1 or smaller that contains the root of the equation, by applying the bisection method. *5*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
फरवरी, 2021

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी अभिकलन 3 दशमलव स्थानों तक दिए जा सकते हैं । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।*

1. (क) आइगेनमानों की गणना किए बिना सिद्ध कीजिए कि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

के आइगेनमान असमिका $0 \leq \lambda \leq 10$ को संतुष्ट करते हैं । *4*

(ख) यदि $x_0 = 2$ से प्रारंभ करके $f(x) = x^3 - 2$ के एक मूल के सन्निकटन के लिए न्यूटन-रेफ्सन विधि का प्रयोग किया जाता है, तो n का वह न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $|x_{n+1} - x_n| < 0{\cdot}05$ हो । *4*

(ग) 3 उप-अंतराल लेकर सिम्प्सन $\frac{1}{3}$ नियम से $\int_1^2 \frac{x-1}{x+1}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए । *2*

2. (क) रैखिक समीकरण निकाय

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1$$

को LU वियोजन विधि से हल कीजिए । *5*

(ख) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए न्यूटन का विभाजित अंतर अंतर्वेशी बहुपद ज्ञात कीजिए :

x	1	3	5	6
f(x)	– 3	1	2	4

साथ ही, f(2) का मान भी आकलित कीजिए । *5*

3. (क) निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को आंशिक कीलकन के साथ गाउसीय निराकरण विधि से हल कीजिए : *4*

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$5x_1 + 4x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$

(ख) लग्रांज अंतर्वेशन से प्रश्न 2(ख) में दिए गए आँकड़ों से $f(2)$ का मान आकलित कीजिए । *3*

(ग) बहुपद $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 2$ के लिए हॉर्नर विधि से $f(3)$ और $f'(3)$ के मान ज्ञात कीजिए । *3*

4. (क) गाउस-जॉर्डन विधि से आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए । 4

(ख) $f'''(x_k)$ का मान ज्ञात करने के लिए एक संख्यात्मक अवकलन सूत्र

$$f_k''' = \frac{1}{4h^3}\left[2\left(f_{k+2} - f_{k-2}\right) - 4\left(f_{k+1} - f_{k-1}\right)\right]$$

द्वारा दिया गया है, जहाँ

$$f(x_{k-n}) = f(x_k - nh), \;\; n = 1, 2, 3, \ldots \text{ है ।}$$

इस सूत्र की टेलर श्रेणी प्रसार से रुंडन त्रुटि ज्ञात कीजिए । *6*

5. (क) निम्नलिखित आव्यूह के परिमाण में अधिकतम आइगेनमान और संगत आइगेनसदिश ज्ञात करने के लिए घात विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_0 = (1, 0, 0)$ लीजिए । *5*

(ख) सोपान लंबाई $h = 0{\cdot}1$ लेकर, आदि मान समस्या

$$y' = x^2 + y, \;\; y(0) = 1$$

के लिए ऑयलर विधि से $y(0{\cdot}2)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए । *2*

(ग) आगमन से दिखाइए कि

$$\Delta^n(e^x) = (e^h - 1)^n \, e^x, \;\; \forall \; n \geq 1.$$ *3*

6. (क) $h = 0{\cdot}5$ और $h = 0{\cdot}25$ लेकर समलंबी नियम से ज्ञात किए गए सन्निकट समाकलों पर रोम्बर्ग समाकल विधि के प्रयोग से $\int_1^2 f(x)\,dx$ की गणना कीजिए । $f(x)$ के सारणीबद्ध मान नीचे दिए गए हैं : *5*

x	1·0	1·25	1·5	1·75	2·0
f(x)	6	4·6	5·2	3·9	8·5

(ख) यदि $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, जहाँ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ हैं, तो द्वितीय कोटि विभाजित अंतर $f[1, 2, 3]$ का मान $\alpha + \beta + \gamma$ है । क्या यह कथन सत्य है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *2*

(ग) दिखाइए कि नियत बिन्दु पुनरावृत्ति विधि

$$x_{n+1} = \phi(x_n),\ \ n = 0, 1, 2, ...,$$

जहाँ $\phi(x) = 4 + \frac{1}{3}\sin 2x$ है, किसी भी प्रारंभिक सन्निकटन $x_0 \in \mathbf{R}$ के मान के लिए अभिसरित होती है । *3*

7. (क) चतुर्थ कोटि टेलर श्रेणी विधि के प्रयोग से आदि मान समस्या

$$y' = x - \frac{y}{x}, \; y(1) = 1,$$

से $y(1 \cdot 2)$ का मान ज्ञात कीजिए । $h = 0 \cdot 2$ लीजिए । *5*

(ख) इकाई लंबाई वाला वह अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें समीकरण $x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ का न्यूनतम धनात्मक मूल हो । इस अंतराल से प्रारंभ करके, समद्विभाजन विधि के अनुप्रयोग से $0 \cdot 1$ या इससे कम लंबाई वाला एक अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें दिए गए समीकरण का मूल हो । *5*