

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME**  
**(BDP)**

**Term-End Examination**  
**February, 2021**

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS**  
**MTE-01 : CALCULUS**

*Time : 2 hours*

*Maximum Marks : 50*

*(Weightage : 70%)*

---

**Note :** Question no. 1 is **compulsory**. Attempt any **four** questions from questions no. 2 to 7.

---

---

1. Which of the following statements are *True* and which are *False* ? Justify your answers in the form of a short proof or a counter-example.  $5 \times 2 = 10$

(a) If  $f$  is a real-valued function defined on  $[-1, 1]$  and  $f'(a) = 0$  for some  $a \in [-1, 1]$ , then  $f$  has a local minimum at  $x = a$ .

(b)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 8$  defines an increasing function  $f$  on  $\mathbf{R}$ .

(c) The range of the function  $f$ , defined by  $f(x) = x - [x]$ , where  $[x]$  is the greatest integer  $\leq x$ , is  $[0, 1[$ .

(d) 
$$\frac{d}{dx} \left( \int_1^{e^x} \ln t \, dt \right) = xe^x.$$

- (e)  $f(x) = (x + 1)(x^2 + 11)$  defines an odd function  $f$  of  $x$ .

2. (a) Find

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x + \tan x} \right). \quad 2$$

- (b) Find the volume of the solid of revolution obtained by revolving the area under the curve  $y = 4 - \frac{x^3}{3}$  between  $x = 0$  and  $x = 2$ , about the  $x$ -axis. 4

- (c) Find the intervals on which the graph of  $y = e^{-x^2/8}$  is : (i) concave, (ii) convex. 4

3. (a) Is the function  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , defined by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 0, & x = 3 \end{cases}$$

continuous on  $\mathbf{R}$  ? Give reasons for your answer. 3

- (b) Draw the graph of  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R} : f(x) = x|x|$ . Is  $f$  differentiable at  $x = 0$  ? Give reasons for your answer. 4

- (c) If  $y = x^2 e^{2x}$ , show that at  $x = 0$ ,  $y_n = 2^{n-2} \cdot n(n-1)$ . 3

4. (a) Find all the asymptotes of the curve  $x^4 - y^4 + xy = 0$  parallel to the axes, as well as all the oblique asymptotes. 5

- (b) If  $I_n = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin^n x \, dx$ , find a relation between  $I_n$  and  $I_{n-2}$  for  $n \geq 2$ . Hence obtain  $I_4$ . 5

5. (a) Evaluate : 6

$$\int \frac{(4 + \cos x) \sin 2x \, dx}{\cos^3 x + \cos^2 x + 5 \cos x + 5}$$

- (b) Find the first 3 terms of the Taylor series of the function  $f$ , given by  $f(x) = 3 + \tan^{-1} 5x$ , around  $0.2$ . 4

6. (a) Show that the diagonal of a rectangle of perimeter 6 units is shortest when it is a square. 3

- (b) Calculate the approximate value of  $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx$ , using Simpson's rule, with

8 equal subintervals. 4

(c) If an arrow is shot upwards on the moon with a velocity of 58 m/s, its height  $H$  (in metres) after  $t$  seconds is given by  $H = 58t - 0.83t^2$ .

(i) When will the arrow hit the moon?

(ii) With what velocity will the arrow hit the moon? 3

7. (a) Find the equation of a tangent to the curve  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10$  at a point  $(x_0, y_0)$ . Show that the sum of the intercepts of this tangent is a constant. 4

(b) Differentiate  $\sin^{-1} x$  with respect to  $\cos^{-1} \sqrt{1 - x^2}$ . 2

(c) Find the length of the curve  $y = \ln(\sec x)$  between the points  $x = 0$  and  $x = \pi/3$ . 4

---

स्नातक उपाधि कार्यक्रम  
(बी.डी.पी.)  
सत्रांत परीक्षा  
फरवरी, 2021

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित  
एम.टी.ई.-01 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50  
(कुल का : 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य? अपने उत्तरों की एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रत्युदाहरण के रूप में स्पष्टीकरण कीजिए। 5×2=10
- (क) यदि  $f$ ,  $[-1, 1]$  पर परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है और किसी  $a \in [-1, 1]$  के लिए  $f'(a) = 0$  है, तो  $f$  का  $x = a$  पर एक स्थानीय निम्निष्ठ होगा।
- (ख)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 8$  द्वारा  $\mathbf{R}$  पर परिभाषित फलन  $f$  एक वृद्धिमान फलन है।
- (ग)  $f(x) = x - [x]$ , जहाँ  $[x]$  एक अधिकतम पूर्णांक  $\leq x$  है, द्वारा परिभाषित फलन  $f$  का गोचर (परिसर)  $[0, 1]$  है।

(घ) 
$$\frac{d}{dx} \left( \int_1^{e^x} \ln t \, dt \right) = xe^x.$$

(ड)  $f(x) = (x + 1)(x^2 + 11)$  द्वारा परिभाषित  $x$  का फलन  $f$  एक विषम फलन है ।

2. (क)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x + \tan x} \right)$  ज्ञात कीजिए । 2

(ख) वक्र  $y = 4 - \frac{x^3}{3}$  के  $x = 0$  और  $x = 2$  के बीच के क्षेत्रफल को  $x$ -अक्ष के प्रति घुमाने से प्राप्त घनाकृति का आयतन ज्ञात कीजिए । 4

(ग) वे अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें  $y = e^{-x^2/8}$  का आरेख (i) अवतल, (ii) उत्तल होगा । 4

3. (क) क्या  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 0, & x = 3 \end{cases}$  द्वारा परिभाषित फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}$  पर संतत है ? अपने उत्तर के कारण दीजिए । 3

(ख)  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}: f(x) = x|x|$  का आरेख खींचिए । क्या  $f$ ,  $x = 0$  पर अवकलनीय है ? अपने उत्तर के कारण दीजिए । 4

(ग) यदि  $y = x^2 e^{2x}$  है, तो दर्शाइए कि  $x = 0$  पर  $y_n = 2^{n-2} \cdot n(n-1)$  है । 3

4. (क) वक्र  $x^4 - y^4 + xy = 0$  की अक्षों के समांतर और तिर्यक सभी अनंतस्पर्शी ज्ञात कीजिए । 5

(ख) यदि  $I_n = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin^n x \, dx$  है, तो  $n \geq 2$  के लिए  $I_n$  और  $I_{n-2}$  के बीच एक संबंध ज्ञात कीजिए । इस

प्रकार  $I_4$  भी ज्ञात कीजिए । 5

5. (क)  $\int \frac{(4 + \cos x) \sin 2x \, dx}{\cos^3 x + \cos^2 x + 5 \cos x + 5}$  का मूल्यांकन कीजिए । 6

(ख)  $f(x) = 3 + \tan^{-1} 5x$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$  के,  $0.2$  के प्रति, टेलर श्रेणी के पहले तीन पद ज्ञात कीजिए । 4

6. (क) दर्शाइए कि परिमाण 6 इकाई वाले एक आयत के विकर्ण की लंबाई न्यूनतम होती है जब वह एक वर्ग होता है । 3

(ख) 8 समान उपअंतरालों के साथ  $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx$  का,

सिम्प्सन नियम का प्रयोग करके सन्निकटन मान ज्ञात कीजिए । 4

(ग) यदि एक तीर 58 m/s के वेग से चंद्रमा पर ऊपर की ओर चलाया जाता है तो  $t$  सेकण्ड के बाद इसकी ऊँचाई (मीटर में)  $H = 58t - 0.83t^2$  द्वारा दी जाती है ।

(i) तीर चंद्रमा पर कब वापस लगेगा ?

(ii) तीर चंद्रमा को किस वेग से लगेगा ? 3

7. (क) वक्र  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10$  की बिन्दु  $(x_0, y_0)$  पर स्पर्श-रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए । यह दर्शाइए कि इस स्पर्श-रेखा से बने अंतःखंडों का योग एक अचर है । 4

(ख)  $\sin^{-1} x$  को  $\cos^{-1} \sqrt{1-x^2}$  के सापेक्ष अवकलित कीजिए । 2

(ग) वक्र  $y = \ln(\sec x)$  की बिन्दुओं  $x = 0$  और  $x = \pi/3$  के बीच लंबाई ज्ञात कीजिए । 4

---