No. of Printed Pages : 16 **MTE-07**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2020

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Question **No. 1** is compulsory.*

*(ii) Attempt any **four** questions from Question Nos. 2 to 7.*

(iii) Use of calculators is not allowed.

1. State whether the following statements are true *or* false. Justify your answers in the form of a short proof or a counter-example : 10

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ does not exist.

(b) The function :

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$$

defined by :

$$f(x, y, z) = |x + y + z|$$

is integrable on [0, 1] × [0, 1] × [0, 1].

(c) $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ for the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ defined by :

$$f(x, y) = \sin(e^x + e^y)$$

(d) The following functions are not functionally dependent on $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 1, y > 0\}$:

$$f(x, y) = \frac{2x + 2y}{2x}$$

and $$g(x, y) = \frac{2x + 2y}{2y}.$$

(e) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

$$\subseteq \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$$

2. (a) Calculate the double integral of the function :

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

defined by :

$$f(x, y) = x + y$$

over the region bounded by $x = 0$, $y = 4$ and $y = 2x$. 3

(b) Let :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8y^3}{x^2 + 4y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Show that the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ is continuous on $\mathbf{R}^2$. 5

(c) Find the maximum possible domain and the corresponding range of the quotient function $\dfrac{f}{g}$, where $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ and $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ are defined by $f(x, y) = 4xy$ and $g(x, y) = x^3 + y^3$. 2

3. (a) If x, y, z, u and v are related by the equations :

$$xy + yz + uv = 0$$

and $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = 0$

then compute $\dfrac{\partial u}{\partial y}$. 4

(b) Let $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ be a function defined by :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Check whether or not f has a directional derivative at (0, 0) in the direction $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Deduce that the function f is not differentiable at the point (0, 0). 3

(c) Under what condition on k does :

$$\lim_{x \to 0} \frac{kx \cos x - \sin x}{x^2 \sin x}$$

exist ? Also find the limit when it exists. 3

4. (a) Find the second Taylor polynomial of the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ defined by :

$$f(x, y) = 10 + 3x^2 + 2y^2$$

at (1, 0). 4

(b) Evaluate the following integral by making the indicated change of variables : 6

$$\iiint_W \frac{x + 2y - z}{1 + (y + 3z)^2}\, dx\, dy\, dz$$

where :

$$\begin{aligned} W :\ 0 \le x + 2y - z \le 3; \\ 0 \le y - z \le 2; \\ 0 < y + 3z \le 1 \end{aligned}$$

Transformation :

$$u = x + 2y - z$$

$$v = y - z$$

$$w = y + 3z.$$

5. (a) Evaluate :

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{x - 2}$$

where $[x]$ is the greatest integer function. 2

(b) Compute the volume within the cylinder $x^2 + y^2 = 1$ between the planes $x + y + z = 4$ and $z = 0$. 4

(c) Define the differentiability of a function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ as a linear function. Use the definition to check whether the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ defined by :

$$f(x, y) = x + y^2 + 5xy$$

is differentiable at (1, 1). 4

6. (a) Find the work done by a force $\mathbf{F} = (x^2, y^2)$ in moving a particle from the point (1, 1) to (2, 2) along the line segment from (1, 1) to (2, 1) followed by the line segment from (2, 1) to (2, 2). 4

(b) State the implicit function theorem for a real valued function of two variables. Check whether the theorem is applicable at the point (2, 2) for the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ defined by : 3

$$f(x, y) = x^2 - y^2 .$$

(c) Let $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ and $e_3 = (0, 0, 1)$. Show that :

$$x = e_1 + 2e_2$$

and $$y = e_2 + e_3$$

represent the points (1, 2, 0) and (0, 1, 1) respectively. Find the distance of the point $x + 5y$ from the origin. 3

7. (a) Using the method of Lagrange's multipliers, find the extreme points of the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ defined by $f(x, y) = xy$, on the plane $x + y = 1$. Further, check whether or not f has a local maximum at his extreme point. 4

(b) Let :

$$f : [0, 2] \times [3, 4] \to \mathbf{R}$$

be defined by :

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{if } x \text{ is rational} \\ 1, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

Show that L (P, f) = 2 and U (P, f) = 4, for any partition P of the rectangle $[0, 2] \times [3, 4]$. 3

(c) Let : 3

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

be a function defined by :

$$f(x, y) = \tan\left(\frac{x^3 - 3y^3}{x^3 + 2y^3}\right)$$

Show that :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0\,.$$

MTE-07

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2020

एम.टी.ई.-07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) प्रश्न सं. 1* ***अनिवार्य*** *है।*

(ii) प्रश्न सं. 2 से 7 तक किन्हीं **चार** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(iii) कैलकुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं **या** असत्य। अपने उत्तरों की पुष्टि लघु उपपत्ति अथवा प्रति उदाहरण के रूप में कीजिए : 10

(क) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ का अस्तित्व नहीं है।

(ख) $f(x, y, z) = |x + y + z|$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ पर समाकलनीय है।

(ग) $f(x, y) = \sin(e^x + e^y)$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ के लिए $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ ।

(घ) निम्नलिखित फलन :

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 1, y > 0\}$$

पर फलनिकतः आश्रित नहीं हैं :

$$f(x, y) = \frac{2x + 2y}{2x}$$

एवं $$g(x, y) = \frac{2x + 2y}{2y}$$

(ङ) $$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$\subseteq \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$$

2. (क) $x = 0, y = 4$ और $y = 2x$ द्वारा परिबद्ध प्रदेश पर $f(x, y) = x + y$ द्वारा परिबद्ध फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ द्विक समाकलन को परिकलित कीजिए। 3

(ख) मान लीजिए :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8y^3}{x^2+4y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

दिखाइए कि फलन $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R},\mathbf{R}^2$ पर संतत है। 5

(ग) भागफल फलन $\frac{f}{g}$ का प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए, जहाँ $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ और $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, $f(x, y) = 4xy$ और $g(x,y)=x^3+y^3$ द्वारा परिभाषित हैं। 2

3. (क) यदि x, y, z, u और v निम्नलिखित समीकरणों द्वारा संबंद्ध हैं :

$$xy+yz+uv=0$$

एवं $$x^2+y^2+z^2+u^2+v^2=0$$

तब $\frac{du}{dy}$ परिकलित कीजिए। 4

(ख) मान लीजिए $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। जाँच कीजिए कि f दिशा $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ में, (0, 0) पर दिक्-अवकलज है या नहीं। निष्कर्ष निकालिए कि फलन f बिन्दु (0, 0) पर अवकलनीय नहीं है। 3

(ग) k पर किस प्रतिबंध के अधीन :

$$\lim_{x \to 0} \frac{kx \cos x - \sin x}{x^2 \sin x}$$

का अस्तित्व होता है ? इसकी सीमा भी ज्ञात कीजिए। 3

4. (क) (0, 1) पर $f(x, y) = 10 + 3x^2 + 2y^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ के द्वितीय टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। 4

(ख) चरों में नीचे बताए गए परिवर्तन करके निम्नलिखित समाकल का मूल्यांकन कीजिए : 6

$$\iiint_W \frac{x + 2y - z}{1 + (y + 3z)^2}\, dx\, dy\, dz$$

जहाँ :

$$\begin{aligned} W : 0 &\le x + 2y - z \le 3 \\ 0 &\le y - z \le 2 \\ 0 &< y + 3z \le 1 \end{aligned}$$

रूपान्तरण :

$$\begin{aligned} u &= x + 2y - z \\ v &= y - z \\ w &= y + 3z. \end{aligned}$$

5. (क) $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{x - 2}$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ $[x]$ महतम पूर्णांक फलन है। 2

(ख) बेलन $x^2 + y^2 = 1$ के अंदर स्थित और समतल $x + y + z = 4$ और $z = 0$ से परिबद्ध प्रदेश का आयतन ज्ञात कीजिए। 4

(ग) रैखिक फलन का प्रयोग करके फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ की अवकलनीयता परिभाषित कीजिए। परिभाषा का प्रयोग करके जाँच कीजिए कि फलन

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ f(x, y) = x + y^2 + 5xy,$$

(1, 1) पर अवकलनीय है या नहीं। 4

6. (क) बल $F = (x^2, y^2)$ द्वारा रेखा–खण्ड (1, 1) से (2, 1) तक और फिर रेखा–खण्ड (2, 1) से (2, 2) तक के अनुदिश बिन्दु (1, 1) से (2, 2) तक कण को ले जाने में किया गया कार्य ज्ञात कीजिए। 4

(ख) दो चरों के वास्तविक मान फलन के लिए अस्पष्ट फलन प्रमेय का कथन दीजिए। जाँच कीजिए कि :

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ के लिए बिन्दु (2, 2) या यह प्रमेय लागू होता है या नहीं। 3

(ग) मान लीजिए :

$$e_1 = (1, 0, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0)$$

और $$e_3 = (0, 0, 1)$$

दिखाइए कि :

$$x = e_1 + 2e_2$$

और $$y = e_2 + e_3$$

क्रमशः बिन्दुओं (1, 2, 0) और (0, 1, 1) को निरूपित करते हैं। मूलबिन्दु से बिन्दु $x + 5y$ की दूरी ज्ञात कीजिए।

7. (क) लैग्रांज गुणांक विधि से समतल $x + y = 1$ पर $f(x, y) = xy$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ के चरम बिंदु ज्ञात कीजिए। इसके आगे, दिखाइये कि इस चरम बिंदु पर f का स्थानीय उच्चिष्ठ होता है। 4

(ख) मान लीजिए :

$$f : [0, 2] \times [3, 4] \to \mathbf{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ 1, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। दिखाइए कि आयत $[0, 2] \times [3, 4]$ के किसी विभाजक P के लिए $L(P, f) = 2$ और $U(P, f) = 4$। 3

(ग) मान लीजिए : 3

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

$$f(x, y) = \tan\left(\frac{x^3 - 3y^3}{x^3 + 2y^3}\right)$$

द्वारा परिभाषित है। दिखाइए कि :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$