

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)**Term-End Examination, February, 2021****BPHE-104/PHE-04 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-I****&****PHE-05 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-II****Instructions :**

- (i) *Students registered for both BPHE-104/PHE-04 and PHE-05 courses should answer both the question papers in two separate answer books entering their enrolment number, course code and course title clearly on both the answer books.*
- (ii) *Students who have registered for BPHE-104/PHE-04 or PHE-05 should answer the relevant question paper after entering their enrolment number, course code and course title on the answer book.*

बी.पी.एच.ई.-104/पी.एच.ई.-04/पी.एच.ई.-05**विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)****सत्रांत परीक्षा, फरवरी, 2021****बी.पी.एच.ई.-104/पी.एच.ई.-04 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-I****एवं****पी.एच.ई.-05 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-II****निर्देश :**

- (i) जो छात्र बी.पी.एच.ई.-104/पी.एच.ई.-04 और पी.एच.ई.-05 दोनों पाठ्यक्रमों के लिए पंजीकृत हैं, दोनों प्रश्न-पत्रों के उत्तर अलग-अलग उत्तर पुस्तिकाओं में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ़-साफ़ लिखकर दें।
- (ii) जो छात्र बी.पी.एच.ई.-104/पी.एच.ई.-04 या पी.एच.ई.-05 किसी एक के लिए पंजीकृत हैं, अपने उसी प्रश्न-पत्र के उत्तर, उत्तर पुस्तिका में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ़-साफ़ लिखकर दें।

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

February, 2021

PHYSICS

BPHE-104/PHE-04 : MATHEMATICAL METHODS IN
PHYSICS-I*Time : $1\frac{1}{2}$ hours**Maximum Marks : 25*

***Note :** Attempt **all** questions. The marks for each question are indicated against it. You can use a calculator. Symbols have their usual meanings.*

1. Answer any **three** parts : 3×4=12

(a) Determine the area of a triangle with vertices at $(3, -1, 2)$, $(1, -1, -3)$ and $(4, -3, 2)$.

(b) Determine the directional derivative of the scalar field $\phi = x^2y^2z^2$ at the point $(2, 1, -1)$ in the direction of the vector $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{k}$.

- (c) Show that $\vec{\nabla} \cdot (r^3 \vec{r}) = 6r^3$.
- (d) For a constant vector \vec{a} , if $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{r}$, show that $\vec{a} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{v})$.
- (e) A particle is moving through space. Show that its velocity in cylindrical coordinates is given by $\vec{v} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z$.

2. State Stokes theorem and evaluate

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ where}$$

$\vec{F} = xy \hat{i} + (x + y + z) \hat{j} + x^2 \hat{k}$ and C is a circle of radius 1, in the xy plane centred at the origin.

Use plane polar coordinates.

1+4=5

OR

Calculate the work done by a force

$\vec{F} = -z \hat{i} + x \hat{j} + \hat{k}$ in moving a particle from the origin to the point (1, 1, 1) along the path defined by the functions $y = x^2$; $z = x^3$.

5

3. The probability of a football team winning a match is 0.6. If the team plays 5 matches, calculate the probability of the team winning $1+2=3$

(i) exactly 3 matches.

(ii) at least 2 matches.

OR

The probability of success in a Bernoulli trial is $\frac{1}{3}$. Calculate the mean and variance for a sequence of 450 independent trials. 3

4. Calculate the mean and variance of the Maxwell-Boltzmann distribution for the speeds of gaseous molecules :

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp \left(\frac{-mv^2}{2k_B T} \right),$$

for $0 \leq v \leq \infty$

where v is the speed of the molecule, m is mass of a molecule, T is absolute temperature of gas and k_B is Boltzmann constant. $2+3=5$

OR

Obtain the regression equation for the following data set :

5

X	1	2	3	4	5
Y	2	5	3	8	7

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

फरवरी, 2021

भौतिक विज्ञान

बी.पी.एच.ई.-104/पी.एच.ई.-04 : भौतिकी में गणितीय
विधियाँ-I

समय : $1\frac{1}{2}$ घण्टे

अधिकतम अंक : 25

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने
दिए गए हैं । आप कैल्कुलेटर का प्रयोग कर सकते हैं । प्रतीकों
के अपने सामान्य अर्थ हैं ।

1. किन्हीं **तीन** भागों के उत्तर दीजिए :

$3 \times 4 = 12$

(क) किसी त्रिभुज के शीर्ष $(3, -1, 2)$, $(1, -1, -3)$ और
 $(4, -3, 2)$ पर हैं । त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

(ख) बिंदु $(2, 1, -1)$ पर, सदिश $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{k}$ की दिशा
में, अदिश क्षेत्र $\phi = x^2y^2z^2$ का दिक्-अवकलज निर्धारित
कीजिए ।

(ग) सिद्ध कीजिए कि $\vec{\nabla} \cdot (r^3 \vec{r}) = 6r^3$.

(घ) किसी अचर सदिश \vec{a} के लिए, यदि $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{r}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\vec{a} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{v})$.

(ङ) सिद्ध कीजिए कि समष्टि में गतिमान एक कण का वेग, बेलनी निर्देशांकों में निम्नलिखित है :

$$\vec{v} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z$$

2. स्टोक्स प्रमेय का कथन दीजिए तथा समाकल $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

का मान ज्ञात कीजिए जहाँ

$\vec{F} = xy \hat{i} + (x + y + z) \hat{j} + x^2 \hat{k}$ है और C, xy समतल में स्थित एक वृत्त है जिसकी त्रिज्या 1 है और जिसका केन्द्र मूल-बिन्दु पर है । समतल ध्रुवीय निर्देशांकों का प्रयोग कीजिए ।

1+4=5

अथवा

बल $\vec{F} = -z \hat{i} + x \hat{j} + \hat{k}$ द्वारा एक कण को मूल-बिन्दु से बिन्दु (1, 1, 1) तक ले जाने में किया गया कार्य परिकलित कीजिए यदि कण फलन $y = x^2$; $z = x^3$ द्वारा परिभाषित पथ के अनुदिश गतिमान हो ।

5

3. एक फुटबाल टीम की मैच जीतने की प्रायिकता 0.6 है। यदि टीम 5 मैच खेलती है, तो यह प्रायिकता परिकलित कीजिए कि टीम

$$1+2=3$$

- (i) ठीक 3 मैच जीतती है।
(ii) कम-से-कम दो मैच जीतती है।

अथवा

एक बर्नूली अभिप्रयोग में सफलता की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है। 450 स्वतंत्र अभिप्रयोगों के अनुक्रम के लिए माध्य और प्रसरण परिकलित कीजिए।

3

4. गैसीय अणुओं की चालों द्वारा अनुपालित मैक्सवेल-बोल्ट्समान बंटन निम्नलिखित है :

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp \left(\frac{-mv^2}{2k_B T} \right),$$

$0 \leq v \leq \infty$ के लिए

जहाँ v अणु की चाल है, m अणु का द्रव्यमान है, T गैस का परम तापमान है और k_B बोल्ट्समान नियतांक है। इस बंटन का माध्य और प्रसरण परिकलित कीजिए।

$$2+3=5$$

अथवा

निम्नलिखित आँकड़ों के समुच्चय के लिए समाश्रयण समीकरण प्राप्त कीजिए :

5

X	1	2	3	4	5
Y	2	5	3	8	7

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)**Term-End Examination****February, 2021****PHYSICS****PHE-05 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-II***Time : $1\frac{1}{2}$ hours**Maximum Marks : 25*

***Note :** All questions are **compulsory**. However, internal choices are given. The marks for each question are indicated against it. You may use calculators. Symbols have their usual meanings.*

1. Answer any **three** parts : $3 \times 4 = 12$

(a) Show that solutions of the ODE

$$(y + 4)y' + x = 0$$

is a family of concentric circles centred at $(0, -4)$.

(b) Obtain the general solution of the ODE

$$y'' + 4y - 5 = 7 \exp(2x)$$

(c) Write 3-D heat flow equation and separate it into two ODEs in space and time coordinates.

(d) Classify the following PDEs by way of order and degree, linearity/non-linearity and homogeneity/non-homogeneity :

(i)
$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} = 0$$

(ii)
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{z}} \right) = 0$$

(e) Determine which of the following ODEs are exact :

(i) $\cos x \cos^2 y \, dx + 2 \sin x \sin y \cos y \, dy = 0$

(ii) $(2xy^3 + y \cos x) \, dx + (3x^2y^2 + \sin x) \, dy = 0$

2. A glass of water at 370 K is placed in a room kept at 300 K. It cools to 340 K in 15 minutes. Assuming Newton's law of cooling to describe the process, calculate the time when the temperature of water will be 310 K.

6

OR

Determine the singular points of the ODE

$$x(x-1) \frac{d^2y}{dx^2} + (3x-1) \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Obtain the indicial equation and its roots.

6

3. Obtain Fourier series of the function

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -\frac{T}{2} < t < 0 \\ E_0 \sin \omega t & \text{for } 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

where $T = 2\pi/\omega$.

7

OR

Write the one-dimensional wave equation for a string of length L fixed at both ends. Write down the boundary conditions and obtain the general solution.

7

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

फरवरी, 2021

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-05 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-II

समय : $1 \frac{1}{2}$ घण्टे

अधिकतम अंक : 25

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। परन्तु, आंतरिक विकल्प दिए गए हैं। प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं। आप कैल्कुलेटरो का प्रयोग कर सकते हैं। प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. किन्हीं **तीन** भागों के उत्तर दीजिए :

$3 \times 4 = 12$

(क) सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित साधारण अवकल समीकरण

$$(y + 4) y' + x = 0$$

के हल एक संकेन्द्री वृत्त कुल हैं जिनके केन्द्र $(0, -4)$ पर स्थित हैं।

(ख) साधारण अवकल समीकरण

$$y'' + 4y - 5 = 7 \exp(2x)$$

का व्यापक हल प्राप्त कीजिए।

(ग) त्रिविम ऊष्मा प्रवाह समीकरण लिखिए तथा उसे समष्टि एवं समय के निर्देशांकों वाले दो साधारण अवकल समीकरणों में समानीत कीजिए ।

(घ) निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरणों को कोटि और घात, रैखिकता/अरैखिकता तथा समघातता/असमघातता के अनुसार वर्गीकृत कीजिए :

$$(i) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$(ii) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0$$

(ङ) निर्धारित कीजिए कि निम्नलिखित समीकरणों में से कौन-से साधारण अवकल समीकरण यथातथ हैं :

$$(i) \quad \cos x \cos^2 y \, dx + 2 \sin x \sin y \cos y \, dy = 0$$

$$(ii) \quad (2xy^3 + y \cos x) \, dx + (3x^2y^2 + \sin x) \, dy = 0$$

2. जल से भरे 370 K तापमान वाले गिलास को 300 K पर कमरे में रखा जाता है । इसका ताप 15 मिनट में 340 K हो जाता है । यदि न्यूटन के शीतलन नियम द्वारा इस प्रक्रम की विवेचना की जाती है, तो परिकलित कीजिए कि जल का ताप 310 K कितने समय के बाद होगा ।

6

अथवा

साधारण अवकल समीकरण

$$x(x-1) \frac{d^2y}{dx^2} + (3x-1) \frac{dy}{dx} + y = 0$$

के विचित्र बिन्दु निर्धारित कीजिए ।

इस समीकरण के लिए घातांकी समीकरण प्राप्त कीजिए और उसके मूल ज्ञात कीजिए ।

6

3. निम्नलिखित फलन के लिए फूरिए श्रेणी प्राप्त कीजिए :

$$E(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < t < 0 \text{ के लिए} \\ E_0 \sin \omega t & 0 < t < \frac{T}{2} \text{ के लिए} \end{cases}$$

जहाँ $T = 2\pi/\omega$ है ।

7

अथवा

दोनों सिरों पर बंधी लंबाई L की डोरी के लिए एक-विमीय तरंग समीकरण लिखिए । परिसीमा प्रतिबंध लिखिए और व्यापक हल प्राप्त कीजिए ।

7