BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BSCG)

Term-End Examination

February, 2021

BMTC-132 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 3 hours *Maximum Marks : 100*

Note : ***All*** *questions in Section A and Section B are* ***compulsory****. In Section C, do any* ***five*** *questions out of six questions. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

SECTION A

1. State whether the following statements are *True* or *False*. Give a short proof or a counter-example in support of your answer. *10×2=20*

(i) The function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, given by $f(x, y) = |x| + |y|$ is differentiable at $(-1, 4)$.

(ii) The level curves of the function $f(x, y) = \frac{x}{y}$ are lines passing through the origin (0, 0).

(iii) The function $f(x, y) = e^{x/2y}$ is a homogeneous function.

(iv) Differential equation $\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)\, y^n$ is a non-linear equation for all integer values of n.

(v) The differential equation representing all tangents $ty = x + t^2$ at the point $(t^2, 2t)$ to the parabola $y^2 = 4x$ is $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\,\frac{dy}{dx} + 1 = 0$.

(vi) The differential equation $(x^2 + y^2 + 1)\, dx - 2xy\, dy = 0$ is an exact differential equation.

(vii) The form of trial solution for the differential equation

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = x^3 + \sin x \quad \text{is}$$

$y = x\,(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) + x\,(E \sin x + F \cos x)$.

(viii) Using the transformation $w = \frac{v}{y}$, if the dependent variable of the equation $x\frac{\partial w}{\partial x} = w + y\,\frac{\partial w}{\partial y}$ is changed, then the resulting differential equation has the form $x\,\frac{\partial v}{\partial x} = v + y\,\frac{\partial v}{\partial y}$.

(ix) The partial differential equation

$$(y + x) \frac{\partial z}{\partial x} - (1 + yz) \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$$

is a semi-linear partial differential equation of first order.

(x) Family of planes $z = ax + by + a^2 + b^2$, where a and b are parameters, is the general integral of the partial differential equation

$$z = px + qy + p^2 + q^2 \text{ where,}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

SECTION B

2. (a) Solve the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 3}{2x + y - 3}.$$ *6*

(b) Solve the simultaneous equations

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}.$$ *4*

3. (a) Solve the differential equation

$$x^2y'' - 3xy' + 5y = x^2 \sin(\ln x),\ x > 0.$$ 5

(b) Show that the partial differential equations

$$f(x, y, z, p, q) = p^2 + q^2 - 1 = 0$$

and $g(x, y, z, p, q) = (p^2 + q^2)\,x - pz = 0$

are compatible. Hence find their solution. 5

4. (a) Find the partial derivatives indicated alongside for the following functions : 5

(i) $f(x, y) = x^2y^3 - 2x^4y;\ f_{xxx}$

(ii) $f(x, y, z) = x^5 + x^4y^4z^3 + yz^2;\ f_{xyz}$

(b) Find the limit, if it exists, for the following functions : *5*

(i) $\lim_{(x, y) \to (5, -2)} (x^5 + 4x^3y - 5xy^2)$

(ii) $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{3x^2}{x^2 + y^2}$

SECTION C

5. (a) Examine $\frac{dy}{dx} = \sqrt{|y|}$ for uniqueness of solution. *4*

(b) By using the method of variation of parameters, find the general solution of the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} - y = \frac{2}{1 + e^x}$. *6*

6. (a) A 12-volt battery is connected to a series circuit in which the inductance is 0·5 henry and the resistance is 10 ohms. Formulate the problem and determine the current if the initial current is zero. *6*

(b) Show that there is no set of surfaces orthogonal to the curves given by

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{x + y} = \frac{dz}{1}.$$ *4*

7. (a) Verify that the differential equation

$$(x^2y - y^3 - y^2z)\, dx + (xy^2 - x^2z - x^3)\, dy + (xy^2 + x^2y)\, dz = 0$$

is integrable and find its integral. *6*

(b) If $y = x$ is a particular solution of the differential equation $2xy'' + xy' - y = 0$, obtain its general solution. *4*

8. (a) Solve the partial differential equation $(x^3 + 3xy^2)\, p + (y^3 + 3x^2y)\, q = 2\,(x^2 + y^2)\, z$ where $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. *5*

(b) Solve the differential equation

$$(1 - x^2 + 2y)\frac{dy}{dx} + 2xy = 0.$$ *5*

9. (a) Check whether the following function is continuous at (0, 0) :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Is it differentiable at (0, 0) ? *4*

(b) Let the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ be defined by

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Show that

(i) $f_x\,(0, y) = -\,y$, for all y

(ii) $f_y\,(x, 0) = x$, for all x.

Hence verify that $f_{xy}\,(0, 0) \neq f_{yx}\,(0, 0)$. *6*

10. (a) Show that the following limits do not exist :

(i) $$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2}$$

(ii) $$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x + y}{x + y^2}$$

Also check whether the iterated limits of the function exist or not. *6*

(b) Check whether the conditions of Euler's theorem for mixed partial derivatives are satisfied for the function $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \; x \neq 0.$ *4*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.एस.सी.जी.)

सत्रांत परीक्षा

फरवरी, 2021

बी.एम.टी.सी.-132 : अवकल समीकरण

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *भाग क और भाग ख के **सभी** प्रश्न **अनिवार्य** हैं । भाग ग में छः प्रश्नों में से कोई **पाँच** प्रश्न कीजिए । कैलकुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

खण्ड क

1. बताइए निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । अपने उत्तर के पक्ष में लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए । *10×2=20*

(i) $f(x, y) = |x| + |y|$ द्वारा दिया गया फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, बिंदु $(-1, 4)$ पर अवकलनीय है ।

(ii) फलन $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ के स्तर-वक्र मूल-बिंदु (0, 0) से गुज़रने वाली रेखाएँ हैं ।

(iii) फलन $f(x, y) = e^{x/2y}$ समघात फलन है ।

(iv) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)\, y^n$ n के सभी पूर्णांक मानों के लिए अरैखिक समीकरण है ।

(v) परवलय $y^2 = 4x$ के बिंदु $(t^2, 2t)$ पर सभी स्पर्श-रेखाओं $ty = x + t^2$ को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\,\frac{dy}{dx} + 1 = 0$ है ।

(vi) अवकल समीकरण $(x^2 + y^2 + 1)\, dx - 2xy\, dy = 0$ एक यथातथ अवकल समीकरण है ।

(vii) अवकल समीकरण $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = x^3 + \sin x$ के लिए जाँच हल का रूप

$y = x\,(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) + x\,(E \sin x + F \cos x)$

है ।

(viii) रूपांतरण $w = \frac{v}{y}$ का प्रयोग करके यदि समीकरण $x\frac{\partial w}{\partial x} = w + y\,\frac{\partial w}{\partial y}$ का परतंत्र चर परिवर्तित किया जाए, तब उससे प्राप्त होने वाले अवकल समीकरण का रूप $x\,\frac{\partial v}{\partial x} = v + y\,\frac{\partial v}{\partial y}$ होगा ।

(ix) आंशिक अवकल समीकरण

$$(y + x) \frac{\partial z}{\partial x} - (1 + yz) \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$$

प्रथम कोटि का सामिरैखिक आंशिक अवकल समीकरण है ।

(x) समतल कुल $z = ax + by + a^2 + b^2$, जहाँ a और b प्राचल हैं, आंशिक अवकल समीकरण $z = px + qy + p^2 + q^2$, जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ हैं, का व्यापक समाकल है ।

खण्ड ख

2. (क) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 3}{2x + y - 3}$ को हल कीजिए । *6*

(ख) युगपत समीकरणों $\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$ को हल कीजिए । *4*

3. (क) अवकल समीकरण

$$x^2y'' - 3xy' + 5y = x^2 \sin (ln\ x), x > 0$$

को हल कीजिए । *5*

(ख) दिखाइए कि आंशिक अवकल समीकरण

$$f(x, y, z, p, q) = p^2 + q^2 - 1 = 0$$

और $g(x, y, z, p, q) = (p^2 + q^2) x - pz = 0$

सुसंगत हैं । इस तरह, उनका हल ज्ञात कीजिए । *5*

4. (क) निम्नलिखित फलनों के लिए अनुदिश दर्शाए गए आंशिक अवकल ज्ञात कीजिए : *5*

(i) $f(x, y) = x^2y^3 - 2x^4y;\ f_{xxx}$

(ii) $f(x, y, z) = x^5 + x^4y^4z^3 + yz^2;\ f_{xyz}$

(ख) निम्नलिखित फलनों के लिए सीमा ज्ञात कीजिए, यदि उनका अस्तित्व हो तो : *5*

(i) $\lim\limits_{(x, y) \to (5, -2)} (x^5 + 4x^3y - 5xy^2)$

(ii) $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{3x^2}{x^2 + y^2}$

खण्ड ग

5. (क) समीकरण $\frac{dy}{dx} = \sqrt{|y|}$ के हल की अद्वितीयता जाँच कीजिए । *4*

(ख) प्राचलों की विचरण विधि द्वारा अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - y = \frac{2}{1+e^x}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए । *6*

6. (क) 12 वोल्ट की एक बैटरी को श्रेणी परिपथ के साथ जोड़ा जाता है, जिसमें प्रेरकत्व 0·5 henry और प्रतिरोध 10 ohms है । समस्या को सूत्रित कीजिए और यदि आदि धारा शून्य हो, तो धारा निर्धारित कीजिए । *6*

(ख) दिखाइए कि पृष्ठों का कोई भी समुच्चय समीकरणों $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{x+y} = \frac{dz}{1}$ द्वारा प्राप्त वक्रों के लंबकोणीय नहीं है । *4*

7. (क) सत्यापित कीजिए कि अवकल समीकरण

$$(x^2y - y^3 - y^2z)\,dx + (xy^2 - x^2z - x^3)\,dy + (xy^2 + x^2y)\,dz = 0$$

समाकलनीय है और इसका समाकल ज्ञात कीजिए । *6*

(ख) यदि $y = x$, अवकल समीकरण $2xy'' + xy' - y = 0$ का विशेष हल है, तो इसका व्यापक हल ज्ञात कीजिए । *4*

8. (क) आंशिक अवकल समीकरण

$(x^3 + 3xy^2)\, p + (y^3 + 3x^2y)\, q = 2\,(x^2 + y^2)\, z$

को हल कीजिए, जहाँ $p = \dfrac{\partial z}{\partial x},\ q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ हैं । *5*

(ख) अवकल समीकरण

$$(1 - x^2 + 2y)\, \frac{dy}{dx} + 2xy = 0$$

को हल कीजिए । *5*

9. (क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित फलन (0, 0) पर संतत है या नहीं :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

क्या यह (0, 0) पर अवकलनीय है ? *4*

(ख) मान लीजिए फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है ।

दिखाइए कि

(i) $f_x(0, y) = -y$, सभी y के लिए

(ii) $f_y(x, 0) = x$, सभी x के लिए

इस तरह सत्यापित कीजिए कि $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$. *6*

10. (क) दिखाइए कि निम्नलिखित सीमाओं का अस्तित्व नहीं है :

(i) $$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2}$$

(ii) $$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x + y}{x + y^2}$$

यह भी जाँच कीजिए कि फलन की पुनरावर्ती सीमाओं का अस्तित्व है या नहीं । *6*

(ख) जाँच कीजिए कि क्या मिश्रित आंशिक अवकलजों के लिए ऑयलर प्रमेय के प्रतिबंध फलन $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$ के लिए संतुष्ट होते हैं या नहीं । *4*