1252435

No. of Printed Pages : 10 **PHE-14**

BACHELOR OF SCIENCE (B. Sc.)

Term-End Examination

December, 2019

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS—III

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt **all** questions. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.*

1. Attempt any ***five*** parts : 5×2=10

(a) Obtain the inverse of the matrix :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

and determine M^2.

(b) Determine the Laplace transform of the function :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

(c) For the Legendre polynomial of degree n, $P_n(x)$, show that :

$$P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$$

(d) Obtain the Fourier transform of the function :

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(e) Calculate the residue of the function $f(z) = \dfrac{1}{(z^2 - 1)^2}$ at $z = 1$.

(f) If A^{ij} is an antisymmetric tensor and B_i is a vector, show that $A^{ij} B_i B_j = 0$ (summation convention assumed).

(g) Locate and name the singularities in the finite z-plane of the function :

$$f(z) = \frac{\sin z^2}{z}$$

(h) Starting from the generating function for the Bessel functions of the first kind and integral order, show that :

$$J_0(0) = 1$$

2. Attempt any *two* parts : 2×5=10

(a) Determine the eigen values and the normalized eigen vectors of the matrix :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) (i) If a real matrix is both symmetric and orthogonal, show that its eigen values can be only + 1 and −1.

(ii) Matrix C is not hermitian. Show that $i(C - C^{+})$ is Hermitian.

(c) If ω be the imaginary cube root of unity, show that the set $\{1, \omega, \omega^2\}$ is a cyclic group of order 3 with respect to multiplication.

3. Attempt any *two* parts : 2×5=10

(a) Evaluate the integral :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos\theta}$$

by the method of residues when $-1 < a < 1$.

(b) Evaluate the contour integral :

$$\oint_C z\, e^{1/z}\, dz$$

around a unit circle about the origin.

(c) Determine the Laurent series expansion for function :

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3}$$

valid for $|z| > 3$.

4. Attempt any *two* parts : 2×5=10

(a) Obtain the Fourier transform $g(k)$ of the function $f(x) = e^{-\alpha^2 x^2}$. Draw diagrams of $f(x)$ and $g(k)$ and compare them when α is small.

(b) Calculate the inverse Laplace transform of the function :

$$F(s) = \frac{2s - 3}{s^2 + 2s + 2}$$

(c) Calculate the Laplace transform of the function :

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

5. Attempt any *one* part : 1×10=10

(a) Using the generating relation for the Legendre polynomials :

$$g(x, t) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$$

prove that :

$$nP_{n-1}(x) + (n + 1)\, P_{n+1}(x) = (2n + 1)x\, P_n(x)$$

If $P_0(x) = 1$ and $P_1(x) = x$, show that :

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

(b) Laguerre polynomials of degrees n and k satisfy the differential equations :

$$x \frac{d^2 L_n(x)}{dx^2} + (1 - x) \frac{dL_n(x)}{dx} + nL_n(x) = 0$$

$$x \frac{d^2 L_k(x)}{dx^2} + (1 - x) \frac{dL_k(x)}{dx} + kL_k(x) = 0$$

Show that :

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_k(x) \, dx = 0$$

if $n \neq k$.

पी.एच.ई.-14

विज्ञान स्नातक (बी. एस. सी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2019

पी. एच. ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ–III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न के अंक समाने दिए गए हैं। प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।*

1. कोई **पाँच** भाग हल कीजिए : 5×2=10

(क) निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम प्राप्त कीजिए :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

M^2 का निर्धारण कीजिए।

(ख) फलन $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ का लाप्लास रूपांतर ज्ञात कीजिए।

(ग) कोटि n के लेजैन्ड्रे बहुपदों, $P_n(x)$, के लिए सिद्ध कीजिए कि :

$$P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$$

(घ) निम्नलिखित फलन का फूरिये रूपान्तर ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

(ङ) $z = 1$ पर फलन $f(z) = \dfrac{1}{(z^2 - 1)^2}$ का अवशिष्ट परिकलित कीजिए।

(च) यदि A^{ij} एक प्रतिसममित टेन्सर हो और B_i एक सदिश हो, तो दिखाइए कि $A^{ij} B_i B_j = 0$ (यहाँ संकलन परम्परा प्रयुक्त की गई है।)

(छ) फलन $f(z) = \dfrac{\sin z^2}{z}$ की विचित्रताओं का परिमित z-समतल में स्थान निर्धारण कीजिए और उनका नाम बताइए।

(ज) पूर्णांक कोटि वाले प्रथम प्रकार के बेसल फलन के जनक फलन से प्रारम्भ कर सिद्ध कीजिए कि $J_0(0) = 1$ है।

2. कोई ***दो*** भाग हल कीजिए : 2×5=10

(क) निम्नलिखित आव्यूह के आइगेन मानों और प्रसामान्यीकृत आइगेन सदिशों का निर्धारण कीजिए :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(ख) (i) यदि एक वास्तविक आव्यूह सममित और लाम्बिक दोनों हो, तो सिद्ध कीजिए कि इसके आइगेन मान केवल $+1$ या -1 हो सकते हैं।

(ii) आव्यूह C हर्मिटी नहीं है। सिद्ध कीजिए कि $i(C - C^{+})$ हर्मिटी है।

(ग) यदि ω, 1 का अधिकल्पित घनमूल हो, तो दिखाइए कि समुच्चय $\{1, \omega, \omega^2\}$ गुणन के अधीन कोटि 3 वाला एक चक्रीय समूह है।

3. कोई दो भाग हल कीजिए : $2 \times 5 = 10$

(क) अवशिष्ट विधि का उपयोग कर समाकल $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos\theta}$ का मान निकालिए जब $-1 < a < 1$ है।

(ख) मूलबिन्दु के प्रति एकक वृत्त के अनुदिश कंटूर समाकल $\oint_C z\, e^{1/z} dz$ का मान निकालिए।

(ग) फलन $f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3}$ का लौराँ श्रेणी प्रसार प्राप्त कीजिए जो कि $|z| > 3$ के लिए मान्य हो।

4. कोई **दो** भाग कीजिए : $2\times5=10$

(क) फलन $f(x) = e^{-\alpha^2 x^2}$ का फूरिये रूपान्तर $g(k)$ प्राप्त कीजिए। $f(x)$ और $g(k)$ के चित्र खींचिये और तुलना कीजिए जब α अल्प है।

(ख) फलन $F(s) = \dfrac{2s-3}{s^2+2s+2}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तर परिकलित कीजिए।

(ग) निम्नलिखित फलन का लाप्लास रूपान्तर परिकलित कीजिए :

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < \pi \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

5. कोई **एक** भाग हल कीजिए : $1\times10=10$

(क) लेजैन्ड्रे बहुपदों के जनक सम्बन्ध :

$$g(x,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$$

का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि :

$$nP_{n-1}(x) + (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)\,x\,P_n(x)$$

यदि $P_0(x) = 1$ और $P_1(x) = x$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

(ख) n और k घातों वाले लागेर बहुपद निम्नलिखित अवकल समीकरणों को सन्तुष्ट करते हैं :

$$x\frac{d^2L_n(x)}{dx^2} + (1-x)\frac{dL_n(x)}{dx} + nL_n(x) = 0$$

$$x\frac{d^2L_k(x)}{dx^2} + (1-x)\frac{dL_k(x)}{dx} + kL_k(x) = 0$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^\infty e^{-x}\, L_n(x)\, L_k(x)\, dx = 0$$

यदि $n \neq k$ है।