No. of Printed Pages : 13 1749 **MTE-14**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination, 2019

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 Hours] **[Maximum Marks : 50**

Weightage : 70%

Note : Attempt **any five** questions. Use of calculators is **not** allowed.

---

1. (a) Using dimensional analysis write the expressions for each of the following situations : [6]

   (i) The hydrostatic pressure P of blood where P is a product of blood density d, height h of the blood column between the heart and some lower point of the body, and gravity g.

   (ii) The force F opposing the fall of raindrops through air. Assume that F is the product

of viscosity μ, velocity υ and the diameter r of the drop. Neglect density.

(b) The fish population in a tank is given by the model : [4]

$$a_{n+1} = k(M - a_n)(a_n - m)$$

Where a_n represent the fish population after n years. Identify the parameters k, m, M. Give reasons for your interpretation.

2. (a) Find the terminal velocity and time taken by a raindrop of radius 0.8 cm to reach the ground if it starts its descent in a cloud 35000 m. high. [2]

(b) Find the output yielding maximum profit for the cost function :

$$C = 0.7x^3 - 0.8x^2 + 12x + 9$$

Given that the cost price of x is Rs. 45 per unit.[4]

(c) A drug is induced in a patient's bloodstream at a constant rate r grams/sec. Simultaneously the drug is removed at a rate proportional to the amount x(t) of the drug present at any time t.

Determine the differential equation governing the amount x(t). If the initial concentration of the drug in the bloodstream is x_0, find the concentration of the drug at any time t. [4]

3. (a) It is possible to project a particle with a given velocity in two possible ways so as to make it pass through a point P at a distance r from the point of projection. Show that the product of the times taken to reach this point P in two possible ways is proportional to 'r'. [5]

(b) At a railway reservation booking office the booking officer attends for booking reservations, one person at a time and two chairs are kept for persons waiting in the queue. The person desiring for railway reservation comes according to Poisson distribution with average 10 persons per hour. The service time per person is exponentially distributed with mean 4 minutes per person.

(i) Find the utilization factor.

(ii) Calculate the effective arrival rate at the booking office.

(iii) What is the probability that an arriving person has not to wait ? [5]

4. (a) Suppose that the population x(t) and y(t) satisfy the model given by the following system of equations :

$$\frac{dx}{dt} = 14x - 2x^2 - xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 16y - 2y^2 - xy$$

Determine all the critical points of the system and discuss the type and stability of these critical points. Which critical point represents the possibility of co-existence of the two populations ? [7]

(b) Find out the escape velocity and the acceleration due to gravity on the moon where, mass of the moon is 7.35×10^{22} kg, radius of the moon is 1.738×10^{6}m, and universal gravitational constant G = 6.67×10^{-11} m^3 kg^{-1}. [3]

5. (a) The demand function for a particular commodity

is $y = 15e^{-x/3}, 0 \le x \le 8,$ where y is the price per unit and x is the number of units demanded. Determine the price and the quantity for which the revenue is maximum. [5]

(b) Consider arterial blood viscosity $\mu = 0.025$ poise. If the length of the artery is 1.5 cm, radius 8×10^{-3}cm and $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dyne/cm^2, then find the :

(i) Maximum peak velocity of blood, and

(ii) The shear stress at the wall [5]

6. (a) Two players A and B are involved in a game. Each player has three different strategies. The pay - off table is given below :

$$\begin{array}{c} \quad B \\ A\begin{bmatrix} 5 & -7 & -17 \\ 4 & 6 & -15 \\ 9 & 10 & -13 \end{bmatrix} \end{array}$$

Find the saddle point and the value of the game.

(b) A particle of mass m moves on a straight line

towards the centre of attraction from rest at a distance a from the centre. Its velocity at a distance x from the centre varies as $\sqrt{\frac{a^3 - x^3}{x^3}}$.

Find the law of force. [3]

(c) The recent floods in Kerala were unprecedented and caused a lot of damage in terms of life and property. A lot of people became homeless. If you were incharge of a relief operation, what would you classify as essentials (give four) and non-essentials (give two) for the successful implementation of your operation ? [3]

7. (a) The model for the number of infective y of a population affected by the spread of a non-fatal disease results in a differential equation :

$$\frac{dy}{dt} = y(N\beta - \gamma - \beta y), y(0) = y_0$$

Where N is the total population, y_0 the initial infected population, γ the recovery rate and β the contact rate are all constants. Solve for y and show that the epidemic converges exponentially to the stable state. [5]

(b) Suppose the quarterly sales for a car in a city were 2682, 2462 and 3012, respectively. Use exponential smoothing based upon the first three observations to forecast for the fifth period using $\alpha = \beta = 0.2$ [α, β are smoothing constants]. From the past data prior to the three data points, a straight line was fit. The value on the straight line corresponding to the last observed time is 2988 and the slope is 80. [5]

----- x -----

एम.टी.ई.-14

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा, 2019

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

कुल का : 70%

नोट : किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. (क) विमीय विश्लेषण का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित स्थितियों के व्यंजक लिखिए : [6]

(i) रक्त का द्रवस्थैतिक दाब P जहाँ P रक्त घनत्व d, हृदय और शरीर में किसी निम्न बिंदु के बीच रक्त स्तंभ की ऊँचाई h और गुरुत्व g का गुणन है।

(ii) वायु के माध्यम से वर्षा की बूँदों के गिरने का विरोधी बल F है। मान लीजिए F बूंद की

श्यानता μ, वेग υ और व्यास r का गुणन है। घनत्व की उपेक्षा कीजिए।

(ख) एक तालाब में मछलियों की जनसंख्या का निदर्श :

$a_{n+1} = k(M - a_n)(a_n - m)$ द्वारा प्राप्त है। यहाँ a_n, n वर्षों के बाद मछलियों की जनसंख्या को निरूपित करता है। प्राचल k, m, M की पहचान कीजिए। अपनी व्याख्या के कारण बताइए। [4]

2. (क) त्रिज्या 0.8 cm. वाली एक वर्षा की बूँद का अंतिम वेग तथा उसके भूमि तक पहुँचने में लगने वाला समय ज्ञात कीजिए, यदि वह 35000 m. ऊँचे एक बादल से नीचे गिरना प्रारंभ करती है। [2]

(ख) वह उत्पादन ज्ञात कीजिए जिससे लागत फलन $C = 0.7x^3 - 0.8x^2 + 12x + 9$ के लिए अधिकतम लाभ प्राप्त हो, जबकि दिया गया है कि x की कीमत 45 रु. प्रति इकाई है। [4]

(ग) कोई दवाई एक रोगी की रक्त धारा में r ग्राम/सेकंड की अचर दर से प्रेरित की जा रही है। इसके साथ ही, यह दवाई किसी भी समय t पर उपस्थित दवाई की मात्रा x(t) के समानुपाती दर से निकाली जा रही है। मात्रा x(t) नियंत्रित करने वाला अवकल समीकरण निर्धारित कीजिए।

यदि रक्त धारा में दवाई की प्रारंभिक सांद्रता x_0 है, तो दवाई की किसी भी समय t पर साद्रंता ज्ञात कीजिए। [4]

3. (क) प्रक्षेप बिंदु से दूरी r पर स्थित एक बिंदु P से होकर जाने के लिए एक कण को दिए गए वेग से दो संभव तरीकों से प्रक्षिप्त किया जा सकता है। दिखाइए कि दोनों संभव तरीकों से इस बिंदु P तक पहुँचने में लगे समय का गुणनफल 'r' के समानुपाती है। [5]

(ख) रेलवे आरक्षण बुकिंग ऑफिस में बुकिंग ऑफिसर एक समय में एक व्यक्ति की आरक्षण सेवा करता है और दो कुर्सियाँ पक्तिं में प्रतीक्षा कर रहे व्यक्तियों के लिए रखी गई हैं। रेलवे आरक्षण के लिए व्यक्ति, 10 व्यक्ति प्रति घंटे की औसत वाले प्वासों-बंटन के अनुसार आते हैं। सेवा काल प्रति व्यक्ति माध्य 4 मिनट से चरघातांकतः बंटित है :

(i) उपयोग-गुणक ज्ञात कीजिए।

(ii) बुकिंग ऑफिंस में प्रभावी आगमन दर ज्ञात कीजिए।

(iii) इस बात की प्रायिकता क्या है कि आने वाले व्यक्ति को प्रतीक्षा नहीं करनी पड़ेगी ? [5]

4. (क) मान लीजिए जनसंख्या x(t) और y(t) निम्नलिखित समीकरण निकाय द्वारा प्राप्त निदर्श को संतुष्ट करती है : [7]

$$\frac{dx}{dt} = 14x - 2x^2 - xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 16y - 2y^2 - xy$$

निकाय के सभी क्रांतिक बिंदु ज्ञात कीजिए और उनके प्रकार और स्थायित्व पर चर्चा कीजिए। कौन-सा क्रांतिक बिंदु दोनों जनसंख्याओं के सह-अस्तित्व की संभावना को निरूपित करता है ?

(ख) चंद्रमा पर पलायन वेग और गुरुत्व त्वरण ज्ञात कीजिए जहाँ, चंद्रमा का द्रव्यमान = 7.35×10^{22} kg, चंद्रमा की त्रिज्या = 1.738×10^{6}m, और सार्वत्रिक गुरुत्वीय स्थिरांक, G = 6.67×10^{-11} m^3 kg^{-1} है। [3]

5. (क) मान लीजिए कि एक विशिष्ट वस्तु का माँग फलन $y = 15e^{-x/3}, 0 \leq x \leq 8,$ है, जहाँ y, प्रति इकाई कीमत और x, इकाइयों की माँग संख्या है। वस्तु की कीमत व माँग मात्रा ज्ञात कीजिए जिससे कि आय अधिकतम हो। [5]

(ख) धमनी रक्त श्यानता μ = 0.025 पॉयज है। यदि धमनी की लम्बाई 1.5 cm, त्रिज्या 8×10^{-3}cm तथा $P = P_1 - P_2$ = 4×10^{3} dyne/cm^2 हो, तो : [5]

(i) रक्त का अधिकतम शिखर वेग, तथा

(ii) दीवार पर अपरूपण प्रतिबल ज्ञात कीजिए।

6. (क) दो खिलाड़ी A और B एक खेल खेल रहे हैं। प्रत्येक खिलाड़ी के पास तीन अलग-अलग युक्तियाँ हैं। भुगतान सारणी नीचे दी गई है : [4]

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{bmatrix} 5 & -7 & -17 \\ 4 & 6 & -15 \\ 9 & 10 & -13 \end{bmatrix} \end{array}$$

खेल का पलायन बिंदु और मान ज्ञात कीजिए।

(ख) आकर्षण केन्द्र से दूरी a पर विरामावस्था से प्रारंभ करके द्रव्यमान m वाला एक कण एक सरल रेखा में आकर्षण केन्द्र की ओर गतिमान होता है। केन्द्र से दूरी x पर इसका वेग $\sqrt{\dfrac{a^3 - x^3}{x^3}}$ के अनुसार परिवर्तित होता है। बल नियम ज्ञात कीजिए। [3]

(ग) हाल ही में केरल में आयी बाढ़ अभूतपूर्व थी और इससे जान और माल का बहुत ही नुकसान हुआ। बहुत से लोग बेघर हो गए। यदि आपको राहत प्रक्रिया का इन्चार्ज बना दिया गया होता, तो प्रक्रिया को सफल बनाने के लिए

आप किन तथ्यों को अनिवार्य और किनको गैर-अनिवार्य मानेंगे ? 4 अनिवार्य और दो गैर-अनिवार्य तथ्य लिखिए। [3]

7. (क) अघातक बीमारी के फैलने से प्रभावित होने वाली समष्टि में y संक्रामक व्यक्तियों का निदर्श अवकल समीकरण :

$$\frac{dy}{dt} = y(N\beta - \gamma - \beta y), y(0) = y_0$$

से प्राप्त है, जहाँ N कुल समष्टि, y_0 प्रारंभिक संक्रमित समष्टि, γ ठीक होने की दर और β संपर्क दर सभी अचर हैं। y के लिए हल प्राप्त कीजिए और दिखाइए कि स्थायित्व अवस्था के प्रति महामारी चरघातांकी रूप से अभिसरित होती है। [5]

(ख) मान लीजिए एक शहर में एक कार की तिमाही बिक्रियाँ, क्रमशः 2682, 2462 और 3012 थी। प्रथम तीन प्रेक्षणों पर आधारित चरघातांकी मसृणीकरण से पाँचवीं अवधि की बिक्री का पूर्वानुमान लगाइए जबकि $\alpha = \beta = 0.2$ [α, β मसृणीकरण अचर हैं] पिछले आंकड़ों (तीन आंकड़ा बिंदुओं से पहले) से एक सरल रेखा आसंजित की गई है। अंतिम प्रेक्षित समय की संगत रेखा पर मान 2988 और प्रवणता 80 है। [5]

----- x -----