No. of Printed Pages : 8

M03325

**MTE-11**

# BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

## Term-End Examination, December 2019

## Elective Course : MATHEMATICS

## MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS

*Time : 2 Hours]* *[Maximum Marks : 50*
*(Weightage : 70%)*

---

***Note :*** *(i) Question No. 7 is* ***Compulsory.***
*(ii) Answer* ***any four*** *questions from the Question No.* ***1*** *to* ***6.***
*(iii) Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

---

**1.** a) In a factory of 3000 employees, 5% of employees work for less than 3 hours, 580 work from 3 to 4 hours, 30% work from 4 to 5 hours, 500 work from 5 to 6 hours, 20% work from 6 to 7 hours and the rest of the employees work 7 or more hours. What is the median hours of work. 4

b) In four tosses of a coin, let X be the number of heads. Tabulate the 16 possible outcomes with the corresponding values of X. Determine the 6

i) Probability distribution of X

ii) Mean and Variance of X.

**2.** a) A manufacturing firm produces pipes in two plants I and II with daily production of 1500 and 2000 pipes, respectively. The fraction of defective pipes produced by two plants I and II are 0.006 and 0.008, respectively. If a pipe selected at random from that day's production is found to be defective, what is the chance that it has come from plant I? 4

b) The following table gives indices of industrial production and registered unemployed.

| Year | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Index of production | 100 | 102 | 104 | 107 | 105 | 112 | 103 | 99 |
| Number of unemployed | 15 | 12 | 13 | 11 | 12 | 12 | 19 | 26 |

Compute the Pearson's coefficient of correlation between the production and registered unemployed. Also, find regression coefficient of index of production on the number of unemployed persons. 6

3. a) If $X_1, X_2, \ldots, X_n$ is a random sample from a normal population N(μ, 1), then show that $t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ is an unbiased estimator of $\mu^2 + 1$. 4

b) Let the joint probability density function of the random variables X and Y be 6

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\left(x + y - 3xy^2\right), & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 \quad , & \text{otherwise} \end{cases}$$

i) Find the marginal distributions of X and Y

ii) Check whether E(XY) = E(X) E(Y)

4. a) Let $X \sim N(\mu, 4)$, μ is unknown. To test $H_0 : \mu = -1$ against $H_1 : \mu_1 = 1$ based on a sample of size 10 from this population, we use the critical region $x_1 + 2x_2 + \ldots + 10x_{10} \geq 0$. What is its size? What is the power of test? 6

[You may like to use

$p[0 \leq z \leq 1.4015] = 0.4192$,

$p[0 \leq z \leq 0.4015] = 0.1591$, $p[0 \leq z \leq 2.4015] = 0.4921$ ]

b) Two unbiased dice are thrown. If X is the sum of the numbers showing up, show that $P(|X-7|\geq 3)\leq \frac{35}{54}$. Compare this with the actual probability. 4

5. a) A shoe manufacturing company has collected data on its sales in different shoe size categories. Construct a pie-chart for the sales of different shoe size categories given in the following table. 4

| Category size | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sales (in ₹ thousands) | 60 | 90 | 120 | 180 | 150 | 90 | 30 |

b) A car hire company has two cars, which it hires out on daily basis. The number of demands for a car on each day is distributed as a Poisson distribution with mean 1.5. Calculate the proportion of days on which 4

i) Neither car is used

ii) Some demand is refused

[use $e^{-1.5} = 0.223$]

c) If X has a Poisson distribution such that $P(X = 1) = 2\,P(X = 2)$ find mean and variance of X. 2

6. a) The ideal size of the class for the students enrolled in MTE-11 course is 150 at particular study centre. It is known from an earlier data that on the average only 30% of those candidates will actually attend the class suppose the study centre admits 450 students. What is the probability that more than 150 students attend the class for MTE-11? 3

[You may like to use
$p[0 \leq z \leq 1.59] = 0.4441$, $p[0 \leq z \leq 0.59] = 0.2224$, $p[0 \leq z \leq 2.59] = 0.4952$]

b) In a partially destroyed laboratory the following record of an analysis of data are legible:
Var(X) = 9, Regression equations
$8X - 10Y + 66 = 0$, $40X - 18Y = 214$
Determine: 4

i) The mean values of X and Y, and
ii) The standard deviation of Y.

c) A box has 5 tickets numbered 1, 2, 3, 4 and 5. One of these tickets is drawn at random. 3

i) If A = {1, 2} and B = {1}, then show that $P(B \mid A) > P(B)$
ii) If C = {1, 2, 3} and D = {1, 2, 4}, then show that $P(D \mid C) < P(D)$

**7.** Which of the following statements are true and which are false? Give a short proof or a counter example in support of your answers. 10

i) If $\text{Var}(X_1) = k, \text{Var}(X_2) = 2$ and $\text{Var}(Y) = 45$, where $Y = 3X_2 - X_1$, then $k = 9$

ii) Mean square deviation about any arbitrary value A is minimum when A is median.

iii) The mean and variance of the binomial distribution

$$\left({}^{18}C_x\right)\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x} ; x = 0,1,2,\ldots\ldots,18$$

are 6 and 4, respectively.

iv) If the correlation coefficient between $x$ and y is 0.60, then the correlation coefficient between $3 - 2x$ and $4 - 3y$ will be 0.60.

v) The mean and variance of the exponential distribution with pdf $f(x) = e^{-x}$; $x > 0$ are 1 and 2 respectively.

✧✧✧✧✧✧

# स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

## सत्रांत परीक्षा,

## दिसंबर 2019

## ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

## एम.टी.ई.-11 : प्रायिकता और सांख्यिकी

*समय : 2 घण्टे ]* *[अधिकतम अंक : 50*

*(भारिता : 70)*

*नोट :* *(i) प्रश्न संख्या 7 करना* ***अनिवार्य*** *है।*

*(ii) प्रश्न संख्या 1 से 6 में से* ***कोई चार*** *प्रश्न कीजिए।*

*(iii) कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।*

**1.** क) 3000 कर्मचारियों की एक फैक्टरी में 5% कर्मचारी 3 घंटे से कम काम करते हैं, 580 कर्मचारी 3 से 4 घंटे काम करते है, 30% कर्मचारी 4 से 5 घंटे काम करते हैं, 500 कर्मचारी 5 से 6 घंटे काम करते हैं, 20% कर्मचारी 6 से 7 घंटे काम करते हैं और बचे हुए कर्मचारी 7 या अधिक घंटे काम करते हैं। काम करने के माध्यिका घंटे क्या है? 4

ख) एक सिक्के की चार उछालों में मान लीजिए कि X चित आने की संख्या हैं। 16 संभावित परिणामों की X के संगत मानो के साथ तालिका बनाइए। निम्नलिखित ज्ञात कीजिए। 6

i) X का प्रायिकता घनत्व

ii) X का माध्य और प्रसरण

**2.** क) एक निर्माण फर्म जो पाइप बनाती है, अपने दो संयंत्रों I और II द्वारा क्रमश: 1500 और 2000 पाइपों का दैनिक निर्माण करती है। दोनों संयंत्रों I और II द्वारा बने पाइपों के खराब होने का भिन्न क्रमश: 0.006 और 0.008 है। यदि एक दिन के बने हुए पाइपों में से एक पाइप यादृच्छया चुना जाता है और वह खराब निकलता है, तो वह संयोग क्या है कि वह संयंत्र I से बना है? 4

ख) पंजीकृत बेरोजगारों की संख्या और औद्योगिक उत्पादन सूचकांक निम्नलिखित तालिका में दिये गये हैं।

| वर्ष | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| उत्पादन सूचकांक | 100 | 102 | 104 | 107 | 105 | 112 | 103 | 99 |
| बेरोजगारों की संख्या | 15 | 12 | 13 | 11 | 12 | 12 | 19 | 26 |

उत्पादन और पंजीकृत बेरोजगारों के बीच पीयर्सन सहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिए। बेरोजगारों की संख्या पर उत्पादन सूचकांक का समाश्रयण गुणांक भी ज्ञात कीजिए। 6

3. क) यदि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ एक प्रसामान्य समष्टि $N(\mu, 1)$ से लिया गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है, तो दर्शाइए कि $t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ , $\mu^2 + 1$ का एक अनभिनत आकलक है। 4

ख) मान लीजिए कि यादृच्छिक चरों X और Y का संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन निम्नलिखित है : 6

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\left(x + y - 3xy^2\right), & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 \qquad , & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

i) X और Y के उपांत बंटन ज्ञात कीजिए।

ii) जाँच कीजिए कि E(XY) = E(X) E(Y) है या नहीं

4. क) मान लीजिए $X \sim N(\mu, 4)$, जहाँ $\mu$ अज्ञात है। इस समष्टि से लिए गए आकार 10 के प्रतिदर्श पर आधारित $H_1 : \mu = 1$ के विरूद्ध $H_0 : \mu = -1$ का परीक्षण करने के लिए हम क्रांतिक प्रदेश $x_1 + 2x_2 + \ldots + 10x_{10} \geq 0$ का प्रयोग करते हैं। इसका आकार क्या है? परीक्षण की क्षमता भी ज्ञात कीजिए। 6

[आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं

$p[0 \leq z \leq 1.4015] = 0.4192$,

$p[0 \leq z \leq 0.4015] = 0.1591$, $p[0 \leq z \leq 2.4015] = 0.4921$]

ख) दो अनभिनत पॉसों को एक साथ उछाला जाता है। यदि पॉसों पर आयी हुई संख्याओं का योग X है, तो दर्शाइए कि $P(|X-7|\geq 3)\leq \frac{35}{54}$ वास्तविक प्रायिकता के साथ इसकी तुलना भी कीजिए। 4

5. क) एक जूते बनाने की कंपनी ने अलग–अलग आकार श्रेणियों की बिक्री के आँकड़े इकट्ठे किये। निम्नलिखित तालिका में दिये गये अलग–अलग आकार श्रेणी की बिक्री के लिए वृत्त आरेख बनाइए। 4

| आकार श्रेणी | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| बिक्री (रू. हजार में) | 60 | 90 | 120 | 180 | 150 | 90 | 30 |

ख) एक कार किराये पर चलाने वाली कम्पनी रोजाना के आधार पर दो कार किराये पर लेती है। प्रत्येक दिन की कार की माँग की संख्या प्वासां बंटन में है जिसका माध्य 1.5 है। दिनों का वह अनुपात ज्ञात कीजिए जबकि 4

i) कोई भी कार प्रयोग नहीं की गयी।

ii) कुछ माँगों को मना कर दिया गया।

[use $e^{-1.5} = 0.223$]

ग) यदि X प्वासां बंटन में है और $P(X = 1) = 2\,P(X = 2)$ है, तो X का माध्य और प्रसरण ज्ञात कीजिए। 2

6. क) एक विशेष अध्ययन केन्द्र पर MTE-11 पाठ्यक्रम में पंजीकृत विद्यार्थियों की कक्षा में आदर्श संख्या 150 है। पुराने आँकड़ों से यह ज्ञात है कि केवल 30% विद्यार्थी ही कक्षा में उपस्थित होंगे। मान लीजिए कि अध्ययन केन्द्र 450 विद्यार्थियों को दाखिला देता है। वह प्रायिकता क्या होगी कि कक्षा में 150 विद्यार्थियों से अधिक विद्यार्थी उपस्थित होंगे।

[आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं। 3

$p[0 \leq z \leq 1.59] = 0.4441$, $p[0 \leq z \leq 0.59] = 0.2224$, $p[0 \leq z \leq 2.59] = 0.4952$]

ख) एक आंशिक रूप से नष्ट प्रयोगशाला में आँकड़ों के विश्लेषण के निम्नलिखित रिकॉर्ड उपलब्ध हैं :

$\text{Var}(X) = 9$

समाश्रयण समीकरण

$8X - 10Y + 66 = 0, 40X - 18Y = 214$

निम्नलिखित ज्ञात कीजिए। 4

i) X और Y के माध्य मान

ii) Y का मानक विचलन

ग) एक बक्से में 5 टिकट रखे हैं जिन पर 1, 2, 3, 4 और 5 संख्या लिखी है। 3

i) यदि $A = \{1, 2\}$ और $B = \{1\}$ है, तो दर्शाइए कि $P(B|A) > P(B)$

ii) यदि $C = \{1, 2, 3\}$ और $D = \{1, 2, 4\}$ है, तो दर्शाइए कि $P(D|C) < P(D)$

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं? अपने उत्तर में एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रत्युदाहरण दीजिए। 10

i) यदि $\text{Var}(X_1) = k, \text{Var}(X_2) = 2$ और $\text{Var}(Y) = 45$ है, तो $k = 9$ होगा, जहाँ पर $Y = 3X_2 - X_1$ है।

ii) किसी भी मान A के सापेक्ष माध्य-वर्ग विचलन न्यूनतम होता है जबकि A माध्यिका होती है।

iii) द्विपद बंटन $\left({}^{18}C_x\right)\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x}, x = 0, 1, 2, \ldots, 18$ का माध्य और विचलन क्रमश: 6 और 4 होगा।

iv) यदि $x$ और y के बीच सहसंबंध गुणांक 0.60 है तो $3 - 2x$ और $4 - 3y$ के बीच सहसंबंध गुणांक 0.60 होगा।

v) चार घातांकीय बंटन, जिसका pdf $f(x) = e^{-x}; x > 0$ है, का माध्य और प्रसरण क्रमश: 1 और 2 है।

✧✧✧✧✧✧