No. of Printed Pages : 12

MTE-10

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

03845

Term-End Examination

December, 2019

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Answer any **five** questions. All computations may be done upto 3 decimal places. Use of calculators is **not** allowed. Symbols have their usual meanings.*

---

1. (a) Using three iterations of the inverse power method, find the eigenvalue nearest to 6 of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. Also find the corresponding eigenvectors. Assume the initial approximation to the eigenvector as $v^{(0)} = [1, \quad 1]^T$. *5*

(b) The velocity of a vehicle beginning from rest is given in the following table for part of the first hour. Using Simpson's $\frac{1}{3}$rd rule, find the distance travelled by the vehicle in this hour. *5*

t = time (in minutes)	v = velocity (in km/hr)
10	80
20	60
30	70
40	75
50	70
60	80

2. (a) Perform two iterations of the Birge-Vieta method to find a root of the polynomial $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$. Take the initial approximation $p_0 = 0{\cdot}5$. *4*

(b) The Gauss-Jacobi method is used to solve the system of equations

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{\cdot}5 \\ 0{\cdot}5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine the rate of convergence of the method.

(ii) Find the number of iterations needed to make $\max_i \left|\epsilon_i^{(k)}\right| \leq 10^{-2}$. *6*

3. (a) Using the third order classical Runge-Kutta method, solve the initial value problem

$$y' = \frac{y + 2x}{y + 3x}, \quad y(1) = 2.$$

Find $y(1{\cdot}2)$ taking $h = 0{\cdot}2$. *5*

(b) Determine the order of convergence of the iterative method $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ for finding a simple root of the equation $f(x) = 0$. *5*

4. (a) For the method

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)],$$

determine the optimal value of h based on the criteria

$$\max|\text{Truncation error}| = \max|\text{Round-off error}|,$$

when $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $1 \le x \le 2$ and the maximum round-off error in evaluating $f(x) = 0{\cdot}005$. *4*

(b) Using the LU-decomposition, find the inverse of the matrix

$$\begin{bmatrix} 50 & 107 & 36 \\ 25 & 54 & 20 \\ 31 & 66 & 21 \end{bmatrix}.$$

Take $l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1$. *6*

5. (a) Estimate f(3·5) using the following data : *4*

x	f(x)
1	1000
2	1520
3	1980
4	2900
5	3160

(b) Show that : 2

$$\mu\delta = \frac{1}{2}(\Delta + \nabla)$$

(c) Perform two iterations of the Newton-Raphson method to estimate $\sqrt{2}$. Assume the initial approximation to the root is 1·41. 4

6. (a) Determine the unique polynomial f(x) of degree up to 3 that satisfies $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = 2$, $f(x_1) = 0$ and $f'(x_1) = 3$, where $x_1 = x_0 + h$. 4

(b) Obtain an interpolating polynomial that fits the following data : 3

x	f(x)
–1	2
1	1
2	1
3	4

(c) A differentiation rule of the form $f'_0 = \alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2$ is given. Find the values of α, β and γ so that the rule is exact for polynomials of degree 2. 3

7. (a) Estimate the eigenvalues of the following matrix using Gershgorin bounds :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Draw a rough sketch of the region which contains the eigenvalues. *5*

(b) The following data values for finding approximation to f''(0·3) are given :

x	f(x)
0·1	0·091
0·2	0·155
0·3	0·182
0·4	0·171
0·5	0·130

Using the central difference formula of $O(h^2)$, find approximations to f''(0·3) with h = 0·2 and h = 0·1. Hence, find an improved estimate using extrapolation. *5*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2019

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

---

*नोट : किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी अभिकलन 3 दशमलव स्थानों तक दिए जा सकते हैं । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।*

---

1. (क) प्रतिलोम घात विधि की तीन पुनरावृत्तियों का प्रयोग करके, आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ का 6 के निकटतम आइगेनमान और संगत आइगेनसदिश भी ज्ञात कीजिए । आइगेनसदिश का प्रारंभिक सन्निकटन $v^{(0)} = [1, \quad 1]^T$ मान लीजिए । *5*

(ख) विश्रामावस्था से आरंभ कर रही एक गाड़ी का वेग पहले घंटे के लिए निम्नलिखित तालिका में दिया गया है । सिम्प्सन का $\frac{1}{3}$ नियम प्रयोग करके, इस घंटे में गाड़ी द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए । *5*

t = समय (मिनट में)	v = वेग (किमी/घंटे में)
10	80
20	60
30	70
40	75
50	70
60	80

2. (क) बर्ज-विएटा विधि की दो पुनरावृत्तियाँ करके बहुपद $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$ का मूल ज्ञात कीजिए । आदि सन्निकटन $p_0 = 0{\cdot}5$ लीजिए । *4*

(ख) समीकरण निकाय

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{\cdot}5 \\ 0{\cdot}5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

को हल करने के लिए गाउस-जैकोबी विधि का प्रयोग किया गया ।

(i) विधि की अभिसरण दर ज्ञात कीजिए ।

(ii) $\max_i \left|\varepsilon_i^{(k)}\right| \leq 10^{-2}$ के लिए आवश्यक पुनरावृत्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए । *6*

3. (क) तृतीय कोटि चिरप्रतिष्ठित रूंगे-कुट्टा विधि द्वारा आदि मान समस्या $y' = \dfrac{y + 2x}{y + 3x}$, $y(1) = 2$ का हल प्राप्त कीजिए । $h = 0{\cdot}2$ लेकर $y(1{\cdot}2)$ ज्ञात कीजिए । *5*

(ख) समीकरण $f(x) = 0$ का साधारण मूल ज्ञात करने के लिए पुनरावृत्ति विधि $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ की अभिसरण कोटि ज्ञात कीजिए । *5*

4. (क) विधि

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$$

के लिए निकष

$$\max|\text{रुंडन त्रुटि}| = \max|\text{निकटन त्रुटि}|$$

पर आधारित h का इष्टतम मान ज्ञात कीजिए, जबकि $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $1 \le x \le 2$ और f(x) के मूल्यांकन में अधिकतम निकटन त्रुटि 0·005 है । *4*

(ख) LU-वियोजन विधि का प्रयोग करके आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 50 & 107 & 36 \\ 25 & 54 & 20 \\ 31 & 66 & 21 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए ।

$l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1$ लीजिए । *6*

5. (क) निम्नलिखित आँकड़ों का प्रयोग करके f(3·5) आकलित कीजिए : *4*

x	f(x)
1	1000
2	1520
3	1980
4	2900
5	3160

(ख) दिखाइए कि : 2

$$\mu\delta = \frac{1}{2}(\Delta + \nabla)$$

(ग) $\sqrt{2}$ आकलित करने के लिए न्यूटन-रैफ्सन विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए । मूल का आदि सन्निकटन 1·41 मान लीजिए । 4

6. (क) $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = 2$, $f(x_1) = 0$ और $f'(x_1) = 3$, जहाँ $x_1 = x_0 + h$, को संतुष्ट करने वाला घात 3 तक का एकक बहुपद $f(x)$ ज्ञात कीजिए । 4

(ख) निम्नलिखित आँकड़ों को आसंजित करने वाला अंतर्वेशी बहुपद प्राप्त कीजिए : 3

x	f(x)
–1	2
1	1
2	1
3	4

(ग) अवकलन सूत्र $f_0' = \alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2$ दिया गया है । α, β और γ के मान ज्ञात कीजिए जिससे कि सूत्र घात 2 के बहुपद के लिए यथातथ हो । 3

7. (क) गर्शगोरिन परिबंधों का प्रयोग करके निम्नलिखित आव्यूह के आइगेनमान आकलित कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

उस प्रदेश का ग्राफ़ (रफ स्केच) बनाइए, जहाँ आइगेनमान स्थित हैं । 5

(ख) $f''(0{\cdot}3)$ के सन्निकटन के लिए निम्नलिखित आँकड़ा मान ज्ञात हैं :

x	f(x)
0·1	0·091
0·2	0·155
0·3	0·182
0·4	0·171
0·5	0·130

$O(h^2)$ के केन्द्रीय अंतर सूत्र का प्रयोग करके $h = 0{\cdot}2$ और $h = 0{\cdot}1$ के लिए $f''(0{\cdot}3)$ के सन्निकटन ज्ञात कीजिए । अतः, बहिर्वेशन द्वारा आकलित मान में सुधार कीजिए । 5