

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination,**

**December 2019**

**Elective Course : MATHEMATICS**

**MTE-09 : REAL ANALYSIS**

**Time : 2 Hours]**

**[Maximum Marks : 50**

**(Weightage : 70%)**

---

**Note :** (i) Attempt five questions in all.

(ii) Question No. 1 is Compulsory.

(iii) Answer any four questions out of the Question No. 2 to 7.

---

1. Are the following statements True or False? Give reasons for your answers. 5×2=10

a)  $-2$  is a limit point of the interval  $]-3, 2]$

b) The series  $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \dots$  is divergent.

c) The function,  $f(x) = \sin^2 x$  is uniformly continuous in the interval  $[0, \pi]$ .

d) Every continuous function is differentiable.

e) The function  $f$  defined on  $\mathbb{R}$  by

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ is rational} \\ 2, & x \text{ is irrational} \end{cases}$$

is integrable in the interval  $[2, 3]$ .

(2)

2. a) Prove that the union of two closed sets is a closed set. Give an example to show that union of an infinite number of closed sets need not be a closed set. 4

- b) Examine the function  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defined by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(x+1)^3 & x \neq 0 \\ \frac{5}{6} & x = 0 \end{cases}$$

for continuity on  $\mathbb{R}$ . If it is not continuous at any point of  $\mathbb{R}$ , find the nature of discontinuity there. 4

- c) Find  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$ . 2

3. a) Using the principle of mathematical induction, prove that  $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$  is a natural number,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . 4

- b) Show that there is no real number  $k$  for which the equation,  $x^4 - 3x^2 + k = 0$  has two distinct roots in the interval  $[2, 3]$ . 3

- c) Let  $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by  $f(x) = 5(x) + x^3$ , where  $[x]$  denotes the greatest integer  $\leq x$ . Show that this function is integrable. 3

(3)

4. a) Prove that the function  $f$  defined by

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{if } x \text{ is irrational} \\ -2, & \text{if } x \text{ is rational} \end{cases}$$

is discontinuous,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , using the sequential definition of continuity. 4

b) Examine the convergence of the following series : 4

i)  $\frac{3 \times 4}{5^2} + \frac{5 \times 6}{7^2} + \frac{7 \times 8}{9^2} + \dots$

ii)  $1 + 4x + 4^2x^2 + 4^3x^3 + \dots (x > 0)$

c) Prove that the set of integers is countable. 2

5. a) Prove that 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{2n-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n-2^2}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3^2}} + \dots + \frac{1}{n} \right] = \frac{\pi}{2}$$

b) Prove that the sequence  $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$  is convergent where  $\{a_n\}$  is a bounded sequence. 3

c) Prove that  $\tan x > x > \sin x$ , whenever  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . 3

6. a) Examine the function,  $f(x) = (x+1)^3(x-3)^2$  for extreme values. 4

(4)

- b) Show that the series  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$  is uniformly convergent in  $[\alpha, 1]$  for any  $\alpha > 0$ . 4
- c) Give an example of an infinite set with finite number of limit points, with proper justification. 2
7. a) Show that 4
- i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-3}{x-1} \right)^x = \frac{1}{e^2}$
- ii)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{3}} \frac{1}{(3x+5)^2} = \infty$
- b) For the function,  $f(x) = x^2 - 2$  defined over  $[1, 5]$ , verify :  $L(P, f) \leq U(P, f)$  where  $P$  is the partition which divides  $[1, 5]$  into four equal intervals. 3
- c) Let  $\{a_n\}$  be a sequence defined as  $a_1 = 3$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n$  show that  $\{a_n\}$  converges to zero. 3



स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा,

दिसंबर 2019

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे ]

[अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट : (i) कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ii) प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है।

(iii) प्रश्न संख्या 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों के कारण बताइए। 5×2=10

क)  $-2$  अन्तराल  $]-3, 2]$  का सीमा बिन्दु है।

ख) श्रेणी  $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \dots$  अपसारी है।

ग) फलन  $f(x) = \sin^2 x$ , अन्तराल  $[0, \pi]$  पर एकसमानतः सतत है।

घ) प्रत्येक सतत फलन अवकलनीय है।

ङ)  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ परिमेय है} \\ 2, & x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$

द्वारा  $\mathbb{R}$  पर परिभाषित फलन  $f$  अन्तराल  $[2, 3]$  में समाकलनीय है।

(6)

2. क) सिद्ध कीजिए कि दो संवृत समुच्चयों का सम्मिलन संवृत समुच्चय है। यह दिखाने के लिए एक उदाहरण दीजिए कि संवृत समुच्चयों की परिमित संख्या का सम्मिलन संवृत समुच्चय नहीं भी हो सकता है।

4

ख)  $\mathbb{R}$  पर सातत्य के लिए

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(x+1)^3 & x \neq 0 \\ \frac{5}{6} & x = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  की जाँच कीजिए। यदि यह  $\mathbb{R}$  के किसी बिन्दु पर सतत नहीं है तब असातत्य का प्रकार ज्ञात कीजिए।

4

- ग)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$  ज्ञात कीजिए।

2

3. क) गणितीय आगम नियम द्वारा सिद्ध कीजिए कि  $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$  एक

प्राकृत संख्या है,  $\forall n \in \mathbb{N}$

4

- ख) दिखाइए कि ऐसी कोई वास्तविक संख्या  $k$  नहीं है जिसके लिए समीकरण  $x^4 - 3x^2 + k = 0$  के अन्तराल  $[2, 3]$  में दो अलग-अलग मूल होते हैं।

3

- ग) मान लीजिए  $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 5[x] + x^3$  द्वारा परिभाषित है, जहाँ  $[x]$  महत्तम पूर्णांक  $\leq x$  को निरूपित करता है। दिखाइए कि यह फलन समाकलनीय है।

3

(7)

4. क) सातत्य की अनुक्रमिक परिभाषा द्वारा सिद्ध कीजिए कि

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \\ -2, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन  $f$  असतत है,  $\forall x \in \mathbb{R}$ । 4

- ख) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए : 4

i)  $\frac{3 \times 4}{5^2} + \frac{5 \times 6}{7^2} + \frac{7 \times 8}{9^2} + \dots$

ii)  $1 + 4x + 4^2x^2 + 4^3x^3 + \dots (x > 0)$

- ग) सिद्ध कीजिए कि पूर्णाकों का समुच्चय गणनीय है। 2

5. क) सिद्ध कीजिए कि 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{2n-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n-2^2}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3^2}} + \dots + \frac{1}{n} \right] = \frac{\pi}{2}$$

- ख) सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम  $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$  अभिसारी है जहाँ  $\{a_n\}$  परिवर्द्ध अनुक्रम है। 3

- ग) सिद्ध कीजिए कि  $\tan x > x > \sin x$ , जब कभी  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  3

6. क) चरम मानों के लिए फलन  $f(x) = (x+1)^3(x-3)^2$  की जाँच कीजिए। 4

(8)

ख) दिखाइए कि किसी भी  $\alpha > 0$  श्रेणी  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$ ,  $[\alpha, 1]$  में

एकसमानतः अभिसारी है। 4

ग) उचित पुष्टि के साथ सीमा बिन्दुओं की परिमित संख्या वाले एक अपरिमित समुच्चय का उदाहरण दीजिए। 2

7. क) दिखाइए कि 4

i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-3}{x-1} \right)^x = \frac{1}{e^2}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{3}} \frac{1}{(3x+5)^2} = \infty$

ख)  $[1, 5]$  पर परिभाषित फलन  $f(x) = x^2 - 2$  के लिए सत्यापित कीजिए :  $L(P, f) \leq U(P, f)$ , जहाँ  $P$  एक ऐसा विभाजन है जो  $[1, 5]$  को चार बराबर अन्तरालों में विभाजित करता है। 3

ग) मान लीजिए  $\{a_n\}$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n$  के रूप में परिभाषित एक अनुक्रम है। दिखाइए कि  $\{a_n\}$  शून्य तक अभिसरण करता है। 3

