

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination,

December 2019

Elective Course : MATHEMATICS

MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 2 Hours]

[Maximum Marks : 50

(Weightage : 70%)

*Note : (i) Question No. 1 is Compulsory.**(ii) Attempt any four questions from the remaining questions 2-7.**(iii) Use of calculators is not allowed.*

1. State whether the following statements are True or False. Justify your answer with the help of a short proof or a counter example. No marks will be awarded without justification. 5×2=10

a) The integrating factor of the differential equation

$$xdx + ydy = m(xdy - ydx) \text{ is } \frac{1}{xy}.$$

b) The equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ is hyperbolic.

c) The solution of the differential equation

$$(D^3 + D^2 D' - DD'^2 - D'^3)z = 0 \text{ is}$$

$$z = \phi_1(y+x) + \phi_2(y-x) + x^2 \phi_3(y-x).$$

(2)

- d) The Pfaffian differential equation
 $a^2y^2z^2dx + b^2z^2x^2dy + c^2x^2y^2dz = 0$ is integrable.
- e) The general solution of the equation
 $x^2y'' + xy' - y = 0$, defined in $[0, 1]$ is given by
 $y = c_1x + c_2x^{-1}$.

2. a) In a certain culture of bacteria, the number of bacteria increased six fold in 10 hrs. How long did it take for the population to be double? 3

b) Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y-1}{x+y+3}$. 4

- c) Find the integral curves of the equation
 $(mz - ny)p + (nx - lz)q = (ly - mx)$ 3

3. a) Solve : $\frac{dy}{dx} + 2xy = 1 + x^2 + y^2$ given $y_1(x) = x$ is a solution. 4

b) Solve : $y + px = x^6p^3$. 3

- c) Find a particular integral of the equation
 $(D^2 - 4D + 4)y = x^2 + e^x + \cos 2x$. 3

4. a) Using the method of undetermined coefficients, solve the equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = -2e^{-x} - 5\cos x. \quad 3$$

(3)

b) Solve : $z(1 - z^2)dx + zdy - (x + y + xz^2)dz = 0$. 4

c) Solve the differential equation

$$6y^2 dx - x(2x^2 + y)dy = 0$$

by treating it as a Bernoulli equation in the dependent variable x . 3

5. a) Solve : $\frac{-dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{y(x+y)} = \frac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)}$. 5

b) Using the Lagrange's method, solve the differential

$$\text{equation } (xy^3 - 2x^4)p + (2y^4 - x^3y)q = 9z(x^3 - y^3).$$

5

6. a) Solve : $(D^2 - DD' - 6D'^2)z = xy$. 3

b) Enumerate the constants 'a' and 'b' and find the corresponding differential equation from

$$z = (a+x)(b+y) \quad 3$$

c) Solve the p.d.e., $p^2 = zq$ 4

7. a) Solve the Laplace equation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ in the

rectangle with $u(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0$, $u(x, b) = 0$ and $u(x, 0) = f(x)$. 7

b) Solve : $6y^2 dx - x(2x^3 + y)dy = 0$. 3



स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा,

दिसंबर 2019

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे]

[अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट : (i) प्रश्न संख्या 1 करना अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न संख्या 2-7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iii) कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। बिना पुष्टि के कोई अंक नहीं दिए जाएँगे। 5×2=10

क) अवकल समीकरण $xdx + ydy = m(xdy - ydx)$ का समाकलनगुणक $\frac{1}{xy}$ है।ख) समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ अतिपरवलयिक है।

ग) अवकल समीकरण

 $(D^3 + D^2D' - DD'^2 - D'^3)z = 0$ का हल $z = \phi_1(y+x) + \phi_2(y-x) + x^2\phi_3(y-x)$ है।

(5)

घ) फैफियन अवकल समीकरण

$$a^2y^2z^2dx + b^2z^2x^2dy + c^2x^2y^2dz = 0 \text{ समाकलनीय है।}$$

ड) अंतराल $[0, 1]$ में समीकरण $x^2y'' + xy' - y = 0$ का व्यापक हल

$$y = c_1x + c_2x^{-1} \text{ है।}$$

2. क) बैक्टीरिया के एक संवर्ध में 10 घण्टे में बैक्टीरिया की संख्या में छः गुणा वृद्धि होती है। संख्या को दोगुना होने में कितना समय लगा होगा? 3

ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y-1}{x+y+3}$ को हल कीजिए। 4

ग) समीकरण $(mz - ny)p + (nx - lz)q = (ly - mx)$ के समाकल वक्र ज्ञात कीजिए। 3

3. क) हल कीजिए $\frac{dy}{dx} + 2xy = 1 + x^2 + y^2$ जहाँ एक हल $y_1(x) = x$ प्राप्त है। 4

ख) हल कीजिए $y + px = x^6p^3$ 3

ग) समीकरण $(D^2 - 4D + 4)y = x^2 + e^x + \cos 2x$ का विशेष समाकल प्राप्त कीजिए। 3

4. क) अनिर्धारित गुणांक-विधि द्वारा समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = -2e^{-x} - 5\cos x \text{ का हल प्राप्त कीजिए।} \quad 3$$

(6)

ख) हल कीजिए $z(1-z^2)dx + zdy - (x+y+xz^2)dz = 0$. 4

ग) अवकल समीकरण $6y^2dx - x(2x^2 + y)dy = 0$ को आश्रित चर x में बर्नोली समीकरण मान कर हल कीजिए। 3

5. क) हल कीजिए $\frac{-dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{y(x+y)} = \frac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)}$ 5

ख) लग्रांज-विधि द्वारा अवकल समीकरण

$(xy^3 - 2x^4)p + (2y^4 - x^3y)q = 9z(x^3 - y^3)$ का हल प्राप्त कीजिए। 5

6. क) हल कीजिए $(D^2 - DD' - 6D'^2)z = xy$ 3

ख) $z = (a+x)(b+y)$ में से अक्षरों 'a' और 'b' को विलुप्त करके संगत अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। 3

ग) आंशिक अवकल समीकरण $p^2 = zq$ का हल प्राप्त कीजिए। 4

7. क) लाप्लास समीकरण $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ का हल आयत $u(0, y) = 0$,

$u(a, y) = 0$, $u(x, b) = 0$ तथा $u(x, 0) = f(x)$ में प्राप्त कीजिए। 7

ख) हल कीजिए $6y^2dx - x(2x^3 + y)dy = 0$ 3

