No. of Printed Pages : 8

MTE-07

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

04035

Term-End Examination

December, 2019

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. **1** is **compulsory**. Attempt any **four** questions out of the remaining questions. Use of calculators is **not** allowed.*

---

1. State whether the following statements are *true* or *false*. Give a short proof or a counter-example in support of your answer. *5×2=10*

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - \cos x} = \infty$

(b) For the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, defined by $f(x, y) = 1 - x^2 + y^2$, the point (0, 0) is a stationary point.

(c) If f and g are two real-valued functions of two variables such that $\frac{\partial(f + g)}{\partial x}$ exists at (a, b), then both $\frac{\partial f}{\partial x}$ and $\frac{\partial f}{\partial y}$ exist at (a, b).

(d) The region between the parabolas $y = x^2$ and $x = y^2$ is of both Type-I and Type-II.

(e) The function $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ is a homogeneous function of x and y.

2. (a) Evaluate the following limits : 5

(i) $\lim_{x \to \infty} \sin\left(\frac{2}{x}\right) + \frac{3 + 5x}{5 - 7x}$

(ii) $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x}$

(b) Find the mass of the solid in the first octant which is bounded above by the surface $z = 4 - y^2$ and on the right by $x^2 = y$. The density function is $\delta(x, y, z) = xy$. 5

3. (a) State the inverse function theorem for 3 variables. Use the theorem to show that the function $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ such that $F(x, y, z) = (x^3y, \sin xz, z^2)$ has a local inverse F^{-1} which is continuously differentiable at $(0, \sin 2, 1)$. 4

(b) Show that the function $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$, $x \neq 0$ is continuously differentiable everywhere in its domain. 3

(c) Find two level curves of the function

$$f(x, y) = \frac{2x + 3y}{x - y}, \; x \neq y$$

and sketch them. 3

4. (a) Let $x = e_1 + e_2 - 2e_3$, $y = 2e_1 - e_2 + e_3$, where e_1, e_2, e_3 are unit vectors. Find $|x + 2y|$. Check whether $x + 2y$ is in the sphere $\{z \in \mathbf{R}^3 : |z - a| < 5\}$, where $a = (1, 1, 2)$. *3*

(b) Let $f(x, y) = x^2 - 4xy + 5y^2$. Find the directional derivative of f at (1, 2) in the direction $\frac{\pi}{6}$. *3*

(c) Expand $x^2 + 3y - 2$ in powers of $(x - 1)$ and $(y + 2)$. *4*

5. (a) Show that $\int_{(3, 3/2)}^{(4, 1/2)} 2x \sin \pi y \, dx + \pi x^2 \cos \pi y \, dy$ is independent of path and evaluate it. *6*

(b) Find the slope of the tangent at the point (0, 2, 12) to the curve of intersection of the plane $y = 2$ and the surface $z = 2x^2 + 3y^2$. *2*

(c) Find the domain and range of the function $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$. *2*

6. (a) Find the second order partial derivatives of the function $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$. *3*

(b) Show that the following functions are functionally dependent on the domain $]0, \pi[\times \mathbf{R}$:

$f(x, y) = e^y \sin^2 x$, $g(x, y) = y + 2 \, ln \sin x$ *4*

(c) Evaluate the integral $\iint_D (x - 3y^2) \, dx \, dy$, where $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$. *3*

7. (a) If $u = x^4y + y^2z^3$, where $x = r\,s\,e^t$, $y = r\,s^2\,e^{-t}$ and $z = r^2 s \sin t$, find the value of $\frac{\partial u}{\partial s}$, when $r = 2,\ s = 1,\ t = 0$. 6

(b) Find the repeated limits of the following function at (0, 0) and check whether they are equal or not.

$$f(x, y) = \frac{(y - 3x)(2 + x^2)}{(2y + x)(1 + y^2)}$$

Further check whether the simultaneous limits exist. 4

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2019

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 1 **अनिवार्य** है । शेष प्रश्नों में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । अपने उत्तर के पक्ष में लघु उपपत्ति या प्रत्युदाहरण दीजिए । *5×2=10*

   (क) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1-\cos x} = \infty$

   (ख) $f(x, y) = 1 - x^2 + y^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ के लिए बिन्दु (0, 0) स्तब्ध बिंदु है ।

   (ग) यदि f और g दो चरों के ऐसे दो वास्तविक-मान फलन हैं जिनके लिए $\frac{\partial(f+g)}{\partial x}$ का (a, b) पर अस्तित्व है, तब $\frac{\partial f}{\partial x}$ और $\frac{\partial f}{\partial y}$ दोनों का (a, b) पर अस्तित्व है ।

(घ) परवलय $y = x^2$ और $x = y^2$ के बीच का प्रदेश प्रकार-I और प्रकार-II, दोनों प्रकारों का होता है ।

(ङ) फलन $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, x और y का समघात फलन है ।

2. (क) निम्नलिखित सीमाओं का मूल्यांकन कीजिए : *5*

(i) $\lim_{x \to \infty} \sin\left(\frac{2}{x}\right) + \frac{3 + 5x}{5 - 7x}$

(ii) $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x}$

(ख) प्रथम अष्टांशक में ऐसी घनाकृति का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए जो ऊपर से पृष्ठ $z = 4 - y^2$ से और दाएँ पर $x^2 = y$ से परिबद्ध है । घनत्व फलन $\delta(x, y, z) = xy$ है । *5*

3. (क) 3 चरों के लिए प्रतिलोम फलन प्रमेय का कथन दीजिए । प्रमेय द्वारा दिखाइए कि

$$F(x, y, z) = (x^3y, \sin xz, z^2)$$

द्वारा परिभाषित फलन $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ के लिए स्थानीय प्रतिलोम F^{-1} का अस्तित्व होता है जो $(0, \sin 2, 1)$ पर संतत: अवकलनीय है । *4*

(ख) दिखाइए कि फलन $f(x, y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$, $x \neq 0$ अपने प्रांत में सर्वत्र संतत: अवकलनीय है । *3*

(ग) फलन

$$f(x, y) = \frac{2x + 3y}{x - y}, \; x \neq y$$

के दो स्तर वक्र ज्ञात कीजिए और उनके चित्र भी बनाइए । *3*

4. (क) मान लीजिए $x = e_1 + e_2 - 2e_3$, $y = 2e_1 - e_2 + e_3$, जहाँ e_1, e_2, e_3 एकक सदिश हैं । $|x + 2y|$ ज्ञात कीजिए । जाँच कीजिए कि क्या $x + 2y$, गोले $\{z \in \mathbf{R}^3 : |z - a| < 5\}$ में है, जहाँ $a = (1, 1, 2)$. 3

(ख) मान लीजिए $f(x, y) = x^2 - 4xy + 5y^2$ । दिक् $\frac{\pi}{6}$ में $(1, 2)$ पर f का दिक् अवकलज ज्ञात कीजिए । 3

(ग) $(x - 1)$ और $(y + 2)$ की घातों में $x^2 + 3y - 2$ का प्रसार कीजिए । 4

5. (क) दिखाइए कि $\int_{(3, 3/2)}^{(4, 1/2)} 2x \sin \pi y \, dx + \pi x^2 \cos \pi y \, dy$ पथ के स्वतंत्र है और इसका मूल्यांकन कीजिए । 6

(ख) समतल $y = 2$ और पृष्ठ $z = 2x^2 + 3y^2$ के प्रतिच्छेद-वक्रों के बिन्दु $(0, 2, 12)$ पर स्पर्श-रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए । 2

(ग) फलन $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ का प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए । 2

6. (क) फलन $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$ के द्वितीय कोटि आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए । 3

(ख) दिखाइए कि निम्नलिखित फलन प्रांत $]0, \pi[\times \mathbf{R}$ पर फलनिकत: आश्रित हैं :

$$f(x, y) = e^y \sin^2 x, \; g(x, y) = y + 2 \, ln \sin x$$ 4

(ग) समाकल $\iint_D (x - 3y^2) \, dx \, dy$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\}$. 3

7. (क) यदि $u = x^4y + y^2z^3$, जहाँ $x = r\,s\,e^t$, $y = r\,s^2\,e^{-t}$ और $z = r^2 s \sin t$, तब $\frac{\partial u}{\partial s}$ का मान ज्ञात कीजिए, जब $r = 2,\ s = 1,\ t = 0$ है । 6

(ख) $(0, 0)$ पर निम्नलिखित फलन की पुनरावृत्त सीमाएँ ज्ञात कीजिए और जाँच कीजिए कि वे समान हैं या नहीं ।

$$f(x, y) = \frac{(y - 3x)(2 + x^2)}{(2y + x)(1 + y^2)}$$

इसके आगे, जाँच कीजिए कि युगपत् सीमा का अस्तित्व है या नहीं । 4