No. of Printed Pages : 6 M06922 **MTE-06**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination,

December 2019

Elective Course : MATHEMATICS

MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 Hours] *[Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : (i) Question No. 7 is ***Compulsory****.*

(ii) Answer ***any four*** *questions from* ***1*** *to* ***6****.*

(iii) Use of calculators is ***not*** *allowed.*

1. a) Let G be a group and $a, b, c \in$ G. Show that if $abc = 1$, then $cab = 1 = bca$. Here 1 is the identity element of G. 2

b) Let G be a group whose every element is of order two. Prove that G is abelian. 2

c) Use the fundamental theorem of Homomorphism to prove that the rings $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^4/\mathbb{R}^2$ are isomorphic. 6

2. a) Check whether or not the set of bijective mappings from $\mathbb{Z}$ to itself form a non-abelian group. 4

b) Give one example of each of the following, with justification : 4

i) An infinite ring of characteristic 7.

ii) A finite ring that is not an integral domain.

c) Check whether or not $\mathbb{Z}[x]$ is an ideal of $\mathbb{R}[x]$. 2

3. a) Check if $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ is in A_7 or not. Also find the order of this element. 4

b) Prove that in a ring $\mathbb{R}$ with identity a non-zero nilpotent element is a zero divisor and a unit is not a zero divisor. 4

c) Check whether or not $S = \left\{a + b\sqrt{n} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ is a subgroup of $\mathbb{R}$. 2

4. a) Prove that every ideal of a Euclidean domain is principal. Find p[x] in $\mathbb{R}[x]$ such that

$$\langle p(x) \rangle = \langle x^2 - 1, x^3 + 1 \rangle.$$ 5

b) What are the possible algebraic structures of a group of order 99. 5

5. a) Use the principle of mathematical induction to prove that $n^2 < 2^n$ for n ≥ 5. 3

b) Give two distinct maximal ideals in the polynomial ring $\mathbb{Q}[x]$, with justification. 3

c) Find $Z(D_8)$ and two distinct cosets of $Z(D_8)$ in D_8. 4

6\. a) Check whether or not the set of real numbers is a ring with identity with respect to $\oplus$ and $\odot$ defined as below: 7

$$a \oplus b = a + b + 5,\ a \odot b = a \cdot b + a + b,\ \forall a, b \in \mathbb{R},$$

Where + and $\cdot$ denote the usual addition and multiplication of real numbers.

b) Check whether or not $7x^4 - 36x^3 - 6x^2 + 18x - 12$ is irreducible in $\mathbb{Q}[x]$. 3

7\. Which of the following statements are true, and which are not? Give reasons for your answers in the form of a short proof or a counter-example. 10

i) There is no non-abelian group of order 12.

ii) If in a group G every element is of finite order, then G is of finite order.

iii) The homomorphic image of a non-cyclic group is non-cyclic.

iv) If $\mathbb{R}$ is an integral domain, then $\mathbb{R}/\mathbf{I}$ is an integral domain for every non-zero ideal $\mathbf{I}$ of $\mathbb{R}$.

v) If I and J are ideals of a ring R, then so is $I \cup J$.

✧✧✧✧✧✧

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा,

दिसंबर 2019

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे] *[अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *(i) प्रश्न संख्या 7 करना **अनिवार्य** है।*

*(ii) प्रश्न संख्या **1** से **6** तक में से **कोई चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

*(iii) कैलकुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

---

1. क) मान लीजिए कि G एक समूह है तथा $a, b, c \in G$. दर्शाइए कि यदि $abc = 1$ है, तो $cab = 1 = bca$ है। यहाँ, 1 समूह G का तत्समक अवयव है। 2

ख) मान लीजिए कि G एक ऐसा समूह है जिसके प्रत्येक अवयव की कोटि दो है। सिद्ध कीजिए कि G आबेली है। 2

ग) यह सिद्ध करने के लिए कि वलय $\mathbb{R}^2$ और $\mathbb{R}^4/\mathbb{R}^2$ तुल्यकारी हैं, समाकारिता के मूल प्रमेय का प्रयोग कीजिए। 6

2. क) जाँच कीजिए कि $\mathbb{Z}$ से स्वयं तक एकैकी आच्छादक फलनों का समुच्चय एक अन्–आबेली समूह बनाता है कि नहीं। 4

ख) पुष्टि देते हुए, निम्नलिखित में से प्रत्येक का एक उदाहरण दीजिए। 4

i) अभिलक्षणिक 7 वाला एक अपरिमित वलय

ii) एक परिमित वलय जो एक पूर्णांकीय प्रांत नहीं है।

ग) जाँच कीजिए कि $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ की एक गुणजावली है या नहीं। 2

3. क) जाँच कीजिए कि $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, A_7 में है या नहीं। साथ ही, इस अवयव की कोटि भी ज्ञात कीजिए। 4

ख) सिद्ध कीजिए कि एक तत्समकी वलय $\mathbb{R}$ में एक शून्येत्तर शून्यभावी अवयव एक शून्य का भाजक है, तथा एक मात्रक शून्य का भाजक नहीं है। 4

ग) जाँच कीजिए कि $S = \left\{a + b\sqrt{n} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$, $\mathbb{R}$ का उपसमूह है या नहीं। 2

4. क) सिद्ध कीजिए कि एक यूक्लिडीय प्रांत की प्रत्येक गुणजावली मुख्य होती है। $\mathbb{R}[x]$ में ऐसा $p[x]$ ज्ञात कीजिए कि

$\langle p(x) \rangle = \langle x^2 - 1, x^3 + 1 \rangle$ हो। 5

ख) कोटि 99 के समूह की संभव बीजीय संरचनाएँ क्या हैं? 5

5. क) $n \geq 5$ के लिए, $n^2 < 2^n$ सिद्ध करने के लिए, गणितीय आगमन नियम का प्रयोग कीजिए। 3

ख) पुष्टि देते हुए, बहुपद वलय $\mathbb{Q}[x]$ में दो अलग उच्चिष्ठ गुणजावलियाँ दीजिए। 3

ग) $Z(D_8)$ ज्ञात कीजिए तथा D_8 में $Z(D_8)$ के दो अलग सहसमुच्चय भी ज्ञात कीजिए। 4

6. क) जाँच कीजिए कि वास्तविक संख्याओं का समुच्चय निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित $\oplus$ और $\odot$ के सापेक्ष एक तत्समकी वलय है या नहीं। 7

$a \oplus b = a + b + 5, a \odot b = a \cdot b + a + b, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$,

जहाँ + और $\cdot$ वास्तविक संख्याओं के सामान्य योग और गुणन को व्यक्त करते हैं।

ख) जाँच कीजिए कि $7x^4 - 36x^3 - 6x^2 + 18x - 12$, $\mathbb{Q}[x]$ में अखंडनीय है या नहीं। 3

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं तथा कौन-से नहीं हैं? अपने उत्तरों के लिए एक संक्षिप्त उपपत्ति या एक प्रति-उदाहरण के रूप में कारण दीजिए। 10

i) कोटि 12 वाला कोई भी अन्-आबेली समूह नहीं होता।

ii) यदि एक समूह G में प्रत्येक अवयव एक परिमित कोटि का है, तो G परिमित कोटि का होता है।

iii) एक अचक्रीय समूह का समाकारी प्रतिबिंब अचक्रीय होता है।

iv) यदि $\mathbb{R}$ एक पूर्णांकिय प्रांत है, तो $\mathbb{R}$ कि प्रत्येक शून्येत्तर गुणजावली I के लिए , $\mathbb{R}/\mathbf{I}$ एक पूर्णांकिय प्रांत होता है।

v) यदि I और J वलय R की गुणजावलियाँ हो, तो $I \cup J$ भी R की एक गुणजावली होती है।

✧✧✧✧✧✧