No. of Printed Pages : 12

MTE-03

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

03105

Term-End Examination

December, 2019

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-03 : MATHEMATICAL METHODS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

***Note :** Question no. **7** is **compulsory**. Attempt any **four** questions from questions no. **1** to **6**. Use of calculators is **not** allowed. Symbols have their usual meanings.*

1. (a) Let $U = \{4, 5, 6, 7\}$, $A = \{4, 5\}$ and $B = \{5, 6, 7\}$. Verify the De Morgan's laws for A and B. *4*

   (b) If $y = (\sin x)^{\cos x}$, find $\frac{dy}{dx}$. *4*

   (c) The sum of a negative integer and its square is 30. Find the integer. *2*

2. (a) Solve the differential equation

$$\frac{1}{y}\,dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y}\right) dx = 0.$$ *3*

(b) The probabilities of A, B and C solving a problem are $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{7}$ and $\frac{3}{8}$, respectively. If all the three try to solve the problem simultaneously, find the probability that exactly one of them can solve it. *3*

(c) Among 64 offsprings of a certain cross between guinea pigs, 34 were red, 10 were black and 20 were white. According to the genetic model, these numbers should be in the ratio 9 : 3 : 4. Is the data consistent with the model at 5% level ? *4*

[The following values of χ^2 may be useful : $\chi^2_{3,\cdot05} = 7{\cdot}81$, $\chi^2_{2,\cdot05} = 5{\cdot}99$, $\chi^2_{1,\cdot05} = 3{\cdot}84$]

3. (a) Evaluate : *4*

$$I = \int \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$$

(b) Out of 24 bulbs in a shop, 4 bulbs are defective. If we randomly check two bulbs, then what is the probability that

(i) both the bulbs are defective,

(ii) neither of them is defective, and

(iii) one of them is defective ? *3*

(c) A straight line passes through a point $(-1, -2, 3)$ and through the point of intersection of the lines

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{3} \text{ and } \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{4}.$$

Find the equation of the line. *3*

4. (a) A continuous random variable X is distributed as

$$f(x) = C\,x(6-x^2);\ 0 \le x \le 2$$
$$= 0, \quad \text{otherwise.}$$

Find the constant C, E(X) and V(X). *5*

(b) Find the equation of the tangent and the normal to the curve

$y = \dfrac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ at the point $(2a, a)$. *3*

(c) Prove that $\sum_{r=0}^{n} C(n, r) = 2^n$, where C(n, r) are the binomial coefficients. *2*

5. (a) If $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is defined by $f(x) = 4x + 1$, then show that f is a bijection. Find the formula that defines f^{-1}. *4*

(b) In an examination, the data related to the marks obtained by girls (X) and marks obtained by boys (Y) is given as follows :

X	Y
20	6
30	9
10	4
12	5
15	7
25	8
34	9

Fit a linear regression to this data. *6*

6. (a) The position vectors of points P, Q and R are $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ and $7\mathbf{i} - \mathbf{k}$, respectively. Prove that P, Q and R are collinear. *3*

(b) Consider the data given below :

Class Intervals	Frequencies
1·5 – 4·5	1
4·5 – 7·5	3
7·5 – 10·5	8
10·5 – 13·5	5
13·5 – 16·5	3

Calculate

(i) mean,

(ii) median, and

(iii) mode

for the data. *4*

(c) For a binomial distribution (6, p), if $P(X = 2) = 9P(X = 4)$, find p. *3*

7. State whether the following statements are *True* or *False*. Give reasons in support of your answers in the form of a short proof or a counter-example. *5×2=10*

(a) The points A(3, 1), B(9, 7) and C(– 3, 7) are the vertices of a right-angled triangle.

(b) If the mean of the Poisson distribution is 5, then the standard deviation is $\sqrt{10}$.

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - 1}{7x + 7} = \dfrac{2}{7}$.

(d) The points of maxima and minima for the function $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ are 0, 1, 2.

(e) The central value of a set of observations is called 'mode'.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2019

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-03 : गणितीय विधियाँ

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 7 **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।*

---

1. (क) मान लीजिए $U = \{4, 5, 6, 7\}$, $A = \{4, 5\}$ और $B = \{5, 6, 7\}$ । A और B के लिए द मॉर्गन नियम सत्यापित कीजिए । *4*

(ख) यदि $y = (\sin x)^{\cos x}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए । *4*

(ग) ऋण पूर्णांक और इसके वर्ग का योगफल 30 है । पूर्णांक ज्ञात कीजिए । *2*

2. (क) अवकल समीकरण $\frac{1}{y} dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y}\right) dx = 0$ को हल कीजिए । *3*

(ख) A, B और C द्वारा एक सवाल को हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{7}$ और $\frac{3}{8}$ हैं । यदि सभी तीनों एक साथ सवाल को हल करने का प्रयास करते हैं, तो इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इनमें से ठीक एक ही इस सवाल को हल कर सकता है । *3*

(ग) गिनी-पिग के बीच सहवास से पैदा हुए 64 बच्चों में से 34 लाल, 10 काले और 20 सफ़ेद बच्चे थे । जेनेटिक निदर्श के अनुसार, इन संख्याओं का अनुपात 9 : 3 : 4 होना चाहिए । क्या 5% स्तर पर ये आँकड़े निदर्श के सुसंगत हैं ? *4*

[χ^2 के निम्नलिखित मान आपके लिए उपयोगी हो सकते हैं :

$$\chi^2_{3,\cdot05} = 7{\cdot}81,\ \chi^2_{2,\cdot05} = 5{\cdot}99,\ \chi^2_{1,\cdot05} = 3{\cdot}84\,]$$

3. (क) मूल्यांकन कीजिए : *4*

$$I = \int \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$$

(ख) एक दुकान में 24 बल्बों में से 4 बल्ब ख़राब हैं । यदि हम यादृच्छया दो बल्बों की जाँच करते हैं, तो इस बात की क्या प्रायिकता होगी कि

(i) दोनों बल्ब ख़राब हों,

(ii) उनमें से कोई भी बल्ब ख़राब न हो, और

(iii) उनमें से एक बल्ब ख़राब हो ? *3*

(ग) एक सीधी रेखा बिंदु (– 1, – 2, 3) और रेखाओं $\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{3}$ और $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{4}$ के प्रतिच्छेद बिंदु से होकर गुज़रती है । रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए । *3*

4. (क) एक संतत यादृच्छिक चर X का बंटन इस प्रकार है

$$f(x) = C\,x(6 - x^2); \ 0 \le x \le 2$$
$$= 0, \ \text{अन्यथा ।}$$

अचर C, E(X) और V(X) ज्ञात कीजिए । *5*

(ख) बिंदु (2a, a) पर वक्र $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ की स्पर्श-रेखा और अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए । *3*

(ग) सिद्ध कीजिए कि $\sum_{r=0}^{n} C(n, r) = 2^n$, जहाँ C(n, r) द्विपद गुणांक हैं । 2

5. (क) यदि फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x + 1$ द्वारा परिभाषित हो, तो दिखाइए कि f एकैकी आच्छादी है । f^{-1} को परिभाषित करने वाला सूत्र भी ज्ञात कीजिए । 4

(ख) एक परीक्षा में, लड़कियों (X) द्वारा प्राप्त किए गए अंकों और लड़कों (Y) द्वारा प्राप्त किए गए अंकों से संबंधित आँकड़े निम्नलिखित हैं :

X	Y
20	6
30	9
10	4
12	5
15	7
25	8
34	9

आँकड़ों का समंजन करने वाला रैखिक समाश्रयण प्राप्त कीजिए । 6

6. (क) बिंदुओं P, Q और R के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ और $7\mathbf{i} - \mathbf{k}$ हैं । सिद्ध कीजिए कि P, Q और R संरेख हैं । *3*

(ख) नीचे दिए गए आँकड़ों पर विचार कीजिए :

वर्ग अंतराल	बारंबारता
1·5 – 4·5	1
4·5 – 7·5	3
7·5 – 10·5	8
10·5 – 13·5	5
13·5 – 16·5	3

निम्नलिखित आँकड़ों का

(i) माध्य,

(ii) माध्यिका, और

(iii) बहुलक

ज्ञात कीजिए । *4*

(ग) द्विपद बंटन (6, p) के लिए, यदि

$P(X = 2) = 9P(X = 4)$ हो, तो p ज्ञात कीजिए । *3*

7. बताइए कि निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य*। अपने उत्तरों के पक्ष में एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रत्युदाहरण के रूप में कारण दीजिए। *5×2=10*

(क) बिंदुओं A(3, 1), B(9, 7) और C(– 3, 7) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

(ख) यदि एक प्वासों बंटन का माध्य 5 है, तो इसका मानक विचलन $\sqrt{10}$ होगा।

(ग) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x - 1}{7x + 7} = \frac{2}{7}$.

(घ) फलन $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ बिंदु 0, 1, 2 हैं।

(ङ) प्रेक्षणों के समुच्चय का मध्य मान 'बहुलक' होता है।