

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)****Term-End Examination**

01042

**December, 2017****ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS  
MTE-09 : REAL ANALYSIS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage : 70%)*

---

**Note :** Attempt *five* questions in all. Question no. 1 is *compulsory*. Do any *four* questions from questions no. 2 to 7.

---

---

1. Are the following statements *true* or *false* ? Give proper reason for your answer. 5×2=10

(a) The sequence of functions  $(f_n)$ , where

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbf{R},$$
 is **not** point-wise

convergent.

(b) For the function  $f$  defined by

$$f(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10,$$

there exists a point  $\alpha \in ]1, 2[$  such that  $f'(\alpha) = 0$ .

(c) Every monotonically increasing sequence is convergent.

(d) The period of the function  $f(x)$  given by  $f(x) = |\cos^3 3x|$  is  $\frac{\pi}{3}$ .

(e) The function  $f : [3, 13] \rightarrow \mathbf{R}$  defined by  $f(x) = [x - 3] - 13$  is a continuous function, where  $[x]$  stands for the greatest integer less than or equal to  $x$ .

2. (a) Show that the set

$$X = [1, 5] \cup [6, 9] \cup [15, 30]$$

is a compact subset of  $\mathbf{R}$ . 3

(b) Check whether the chord joining the points, whose abscissae are  $x = 2$  and  $x = 5$ , on the curve  $y = x^2 + 2x + 2$ , is parallel to the tangent to the curve at some point or not. 3

(c) Evaluate the limit, if it exists : 4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x$$

3. (a) Check the convergence of the series

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^3}$$

using Cauchy's integral test. 3

(b) Prove that  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$  is an algebraic number. Is every irrational number, an algebraic number? Justify your answer. 3

(c) Evaluate : 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+3)^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+6)^3}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(7n-3)^3}} \right]$$

4. (a) Prove that the complement of every closed set is open. 3

(b) Prove that the equation,  $\sin x - \frac{x}{\sqrt{2}} = 0$

possesses a root lying in the interval  $\left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ . 3

(c) Find whether the following sequences converge or not : 4

(i)  $(3 + (-1)^{n-1})$

(ii)  $\left( \frac{2n^4 - 9n^2}{3n^2 + 9n^4} \right)$

5. (a) Prove the following inequality : 4

$$x < \sin^{-1} x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ if } 0 < x < 1$$

(b) Prove that the function  $f$  given by  $f(x) = \cos \frac{1}{x}$  is not uniformly continuous on  $]0, \infty[$ . 3

(c) Test the absolute and the conditional convergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^6} \right). \quad 3$$

6. (a) Prove or disprove the following statement : 3  
 “Sum of a continuous function and a discontinuous function on the same interval is always continuous on it.”
- (b) Prove that the set of integers is countable. 2
- (c) Verify Second Mean Value Theorem (for integral) for the functions  
 $f(x) = x - 1$ ,  $g(x) = x^3$  in the interval  $[-1, 1]$ . 5
7. (a) Let  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  be a function defined by  
 $f(x) = 3x + 2$ .

Let

$$P_1 = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right\} \text{ and}$$

$$P_2 = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1 \right\}$$

be two partitions of the interval  $[0, 1]$ . Find  $U(P_1, f)$  and  $L(P_2, f)$  and compare their values. 3

- (b) Find the Maclaurin series expansion of  $\sin x$ . 4
- (c) Check the convergence of the following series : 3

(i) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3/2}}{n^3 + 3}$$

(ii) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^{n+1}}$$

स्नातक उपाधि कार्यक्रम  
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2017

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50  
(कुल का : 70%)

नोट : कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है ।  
प्रश्न सं. 2 से 7 में से कोई चार प्रश्न हल कीजिए ।

1. क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य ? अपने उत्तर के लिए उपयुक्त कारण बताइए । 5×2=10

(क) फलन अनुक्रम  $(f_n)$ , जहाँ  $f_n(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ ,  $x \in \mathbf{R}$

बिंदुशः अभिसारी नहीं है ।

(ख)  $f(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$  के लिए एक ऐसे बिन्दु  $\alpha \in ]1, 2[$  का अस्तित्व होता है जिसके लिए  $f'(\alpha) = 0$ .

(ग) प्रत्येक एकदिष्टतः वर्धमान अनुक्रम अभिसारी होता है ।

(घ)  $f(x) = |\cos^3 3x|$  द्वारा दिए गए फलन  $f(x)$  का आवर्तनांक  $\frac{\pi}{3}$  है।

(ङ)  $f(x) = [x - 3] - 13$  द्वारा परिभाषित फलन  $f : [3, 13] \rightarrow \mathbf{R}$  संतत फलन है, जहाँ  $[x]$ ,  $x$  से कम या  $x$  के बराबर महत्तम पूर्णांक है।

2. (क) दिखाइए कि समुच्चय

$$X = [1, 5] \cup [6, 9] \cup [15, 30]$$

$\mathbf{R}$  का संहत उपसमुच्चय है।

3

(ख) जाँच कीजिए कि वक्र  $y = x^2 + 2x + 2$  पर उन बिन्दुओं को, जिनके भुज  $x = 2$  और  $x = 5$  हैं, मिलाने वाली जीवा उस बिन्दु पर खींची गई स्पर्शरेखा के समांतर होती है या नहीं।

3

(ग) निम्नलिखित सीमा का यदि अस्तित्व है, तो इसका मूल्यांकन कीजिए :

4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x$$

3. (क) कौशी के समाकल परीक्षण द्वारा श्रेणी

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^3}$$

के अभिसरण की जाँच कीजिए।

3

(ख) सिद्ध कीजिए कि  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$  एक बीजीय संख्या है। क्या प्रत्येक अपरिमेय संख्या बीजीय संख्या होती है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

3

(ग) मूल्यांकन कीजिए :

4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+3)^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+6)^3}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(7n-3)^3}} \right]$$

4. (क) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संवृत समुच्चय का पूरक विवृत होता है ।

3

(ख) सिद्ध कीजिए कि समीकरण  $\sin x - \frac{x}{\sqrt{2}} = 0$  का एक

मूल होता है जो अन्तराल  $\left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$  में स्थित होता है ।

3

(ग) ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित अनुक्रम अभिसारी है या नहीं :

4

(i)  $\left( 3 + (-1)^{n-1} \right)$

(ii)  $\left( \frac{2n^4 - 9n^2}{3n^2 + 9n^4} \right)$

5. (क) निम्नलिखित असमिका को सिद्ध कीजिए :

4

$$x < \sin^{-1} x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ यदि } 0 < x < 1$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि  $f(x) = \cos \frac{1}{x}$  द्वारा दिया गया फलन  $f, ]0, \infty[$  पर एकसमानतः संतत नहीं है ।

3

(ग) श्रेणी  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^6} \right)$  के निरपेक्ष और

सप्रतिबंध अभिसरण की जाँच कीजिए ।

3

6. (क) निम्नलिखित कथन को सिद्ध या असिद्ध कीजिए : 3

“एक ही अन्तराल पर संतत फलन और असंतत फलन का योगफल उस अंतराल पर हमेशा संतत होता है।”

(ख) सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों का समुच्चय गणनीय होता है। 2

(ग) अन्तराल  $[-1, 1]$  में फलनों  $f(x) = x - 1$ ,  $g(x) = x^3$  के लिए द्वितीय माध्य मान प्रमेय (समाकलन के लिए) को सत्यापित कीजिए। 5

7. (क) मान लीजिए  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 3x + 2$  द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए

$$P_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\} \text{ और}$$

$$P_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

अन्तराल  $[0, 1]$  के दो विभाजन हैं।  $U(P_1, f)$  और  $L(P_2, f)$  ज्ञात कीजिए और उनके मानों की तुलना कीजिए। 3

(ख)  $\sin x$  का मैक्लॉरिन श्रेणी प्रसार ज्ञात कीजिए। 4

(ग) निम्नलिखित श्रेणी का अभिसरण जाँच कीजिए। 3

(i) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3/2}}{n^3 + 3}$$

(ii) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^{n+1}}$$