

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)****Term-End Examination****December, 2017**

02042

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage : 70%)*

Note : Question no. 1 is **compulsory**. Attempt any **four** questions from the remaining questions no. 2 to 7.
Use of calculators is not allowed.

1. State whether the following statements are *True* or *False*. Justify your answer with the help of a short proof or a counter-example. 5×2=10

(a) The unique solution $y(x)$ of an ordinary differential equation

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 0, & \text{for } x < 0 \\ 1, & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

exists $\forall x \in \mathbf{R}$.

(b)
$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{4/3} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

is a second order differential equation of degree 3.

- (c) y^2 is an integrating factor of the differential equation

$$6xy \, dx + (4y + 9x^2) \, dy = 0.$$

- (d) The Pfaffian differential equation corresponding to the family of surfaces $x^3z + x^2y = c$, where c is a parameter, is $(a - z) [x \, dy + y \, dx] + xy \, dz = 0$.

- (e) Partial differential equation

$$e^x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

is elliptic for $x, y > 0$.

2. (a) Solve the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 3}{2x - 2y + 5} \quad 4$$

- (b) Find the solution of the differential equation

$$(x^2 - y^2) \, dx - 2xy \, dy + e^{-z} \, dz = 0. \quad 2$$

- (c) By changing the independent variable, solve the differential equation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^4} y = \frac{2x^2 + 1}{x^6} \quad 4$$

3. (a) Solve :

$$x + yp^2 = p(1 + xy), \text{ where } p = \frac{dy}{dx} \quad 3$$

- (b) Use the method of undetermined coefficients to find the general solution of the differential equation

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 4 \frac{dy}{dx} = x + 3 \cos x + e^{-2x} \quad 4$$

- (c) Find the complete integral of the differential equation

$$p^2 - y^3q = x^2 - y^2. \quad 3$$

4. (a) Find the particular integral of

$$(D^2 - 1)y = (e^x + 1)^2. \quad 2$$

- (b) Determine the general solution of the differential equation using the method of variation of parameters

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x, \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}. \quad 4$$

- (c) A certain population is known to be growing at a rate given by the logistic equation

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bx), \quad \text{where } a \text{ and } b \text{ are positive constants.}$$

Show that the maximum rate of growth occurs when the population is equal to half the equilibrium size, that is, when the

$$\text{population is } \left(\frac{a}{2b} \right). \quad 4$$

5. (a) Find the envelope of the family of spheres of radius unity and centre at $(c, 1, 1)$ where c is a parameter. 2

- (b) Find the integral curves of

$$\frac{dx}{3x + y - z} = \frac{dy}{x + y - z} = \frac{dz}{2(z - y)}. \quad 4$$

- (c) Solve :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = y \cos x \quad 4$$

6. (a) Find the integral surface of the p.d.e.
 $(x - y) p + (y - x - z) q = z$ through the curve
 $z = 1, x^2 + y^2 = 1.$ 5
- (b) Verify that the equation
 $(2xz - yz) dx + (2yz - xz) dy - (x^2 - xy + y^2) dz = 0$
 is integrable and find its integral. 5
7. (a) Using the method of product solution solve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} + u,$$
 when $u(x, 0) = 6e^{-3x}.$ 4
- (b) Solve the equation
 $6y^2 dx - x(2x^3 + y) dy = 0.$ 3
- (c) Find a particular integral of
 $(D^2 - 2D + 3) y = e^{2x} \sin x.$ 3
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2017

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है । शेष प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटर्स का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य । संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए ।

5×2=10

(क) साधारण अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ के लिए} \\ 1, & x \geq 0 \text{ के लिए} \end{cases}$$

के अद्वितीय हल $y(x)$ का प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ के लिए अस्तित्व है ।

(ख) $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{4/3} = \frac{d^2y}{dx^2}$

द्वितीय कोटि और घात 3 वाला अवकल समीकरण है ।

(ग) y^2 अवकल समीकरण $6xy \, dx + (4y + 9x^2) \, dy = 0$
का समाकलन गुणक है ।

(घ) पृष्ठ-कुल $x^3z + x^2y = c$,
जहाँ c एक प्राचल है, के संगत फैफियन अवकल
समीकरण $(a - z) [x \, dy + y \, dx] + xy \, dz = 0$ है ।

(ङ) आंशिक अवकल समीकरण

$$e^x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

$x, y > 0$ के लिए दीर्घवृत्तीय है ।

2. (क) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 3}{2x - 2y + 5}$ को हल
कीजिए । 4

(ख) अवकल समीकरण $(x^2 - y^2) \, dx - 2xy \, dy + e^{-z} \, dz = 0$
का हल ज्ञात कीजिए । 2

(ग) स्वतंत्र चर परिवर्तन से निम्नलिखित अवकल समीकरण

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^4} y = \frac{2x^2 + 1}{x^6}$$

को हल कीजिए । 4

3. (क) हल कीजिए :

$$x + yp^2 = p(1 + xy), \text{ जहाँ } p = \frac{dy}{dx} \quad 3$$

(ख) अनिर्धारित गुणांक विधि से अवकल समीकरण

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 4 \frac{dy}{dx} = x + 3 \cos x + e^{-2x}$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए । 4

(ग) अवकल समीकरण $p^2 - y^3q = x^2 - y^2$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए ।

3

4. (क) $(D^2 - 1)y = (e^x + 1)^2$ का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए ।

2

(ख) प्राचल विचरण विधि द्वारा अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x, \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए ।

4

(ग). एक जनसंख्या में वृद्धि हो रही है जिसकी दर वृद्धिघात समीकरण $\frac{dx}{dt} = x(a - bx)$, जहाँ a और b धनात्मक अचर हैं, द्वारा प्राप्त है ।

दिखाइए कि अधिकतम वृद्धि दर तब होती है जब जनसंख्या संतुलन साइज़ के आधे के बराबर होती है,

अर्थात्, जब जनसंख्या $\left(\frac{a}{2b}\right)$ होती है ।

4

5. (क) त्रिज्या 1 और केंद्र $(c, 1, 1)$ वाले गोला-कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जहाँ c एक प्राचल है ।

2

(ख)
$$\frac{dx}{3x + y - z} = \frac{dy}{x + y - z} = \frac{dz}{2(z - y)}$$

के समाकल वक्र ज्ञात कीजिए ।

4

(ग) हल कीजिए :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 6 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = y \cos x$$

4

6. (क) आंशिक अवकल समीकरण

$$(x - y) p + (y - x - z) q = z$$

का समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए जो वक्र

$$z = 1, x^2 + y^2 = 1 \text{ से होकर जाता है।}$$

5

(ख) जाँच कीजिए कि समीकरण

$$(2xz - yz) dx + (2yz - xz) dy - (x^2 - xy + y^2) dz = 0$$

समाकलनीय है तथा इसका समाकल ज्ञात कीजिए।

5

7. (क) गुणन हल विधि का प्रयोग करके समीकरण

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} + u, \text{ जब } u(x, 0) = 6e^{-3x}$$

को हल कीजिए।

4

(ख) समीकरण

$$6y^2 dx - x(2x^3 + y) dy = 0$$

को हल कीजिए।

3

(ग) $(D^2 - 2D + 3)y = e^{2x} \sin x$ का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए।

3