

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

03832 Term-End Examination

December, 2017

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-07 : ADVANCED CALCULUS**

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 1 is compulsory. Attempt any four questions from questions no. 2 to 7. Use of calculators is not allowed.*

1. State whether the following statements are *true* or *false*. Justify your answer. $5 \times 2 = 10$
- (a) $(\cos x)^{\cos x}$ is an indeterminate form of type 0^0 as x tends to 0^+ .
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{2x+3} = \frac{-1}{3}$
- (c) If $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ and $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, then $g \circ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.
- (d) $f(x, y) = \max. \left\{ \frac{x}{y}, \frac{y}{x} \right\}$ is a homogeneous function.
- (e) The gradient of $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ at $(1, 2)$ is $(0, 3)$.

2. (a) Find the following limits :

5

(i) $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{1/(x-1)}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan 3x}{\tan x}$

(b) Using cylindrical coordinate, evaluate

$$\int_{-2}^2 \int_{\sqrt{-4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{4-x^2-y^2} x^2 dz dy dx \quad 5$$

3. (a) If

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

show that f is not differentiable at $(0, 0)$. 5

(b) Calculate the work done by

$F(x, y) = (2xy - x^2, x + y^2)$ in moving a particle along the curve C , formed by $y = x^2$ and $y^2 = x$ in the anticlockwise direction.

Draw a suitable figure. 5

4. (a) Find the Jacobian of

$F(x, y, z) = (x \sin yz, 2z^2, 3xy)$ at $(-1, \pi/2, 1)$.

Also find the points where the Jacobian is zero. 3

- (b) Evaluate the following integral by reversing its order of integration :

$$\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin \pi x^3 \, dx \, dy$$

Sketch the region of integration. 4

- (c) Find the domain and range of

$$f(x, y) = 16 - x^2 - y^2.$$

Briefly describe its level curves. 3

5. (a) If $u = xy + e^{3x}$, $x = \sin 2t$, $y = \cos t^2$,

find $\frac{du}{dt}$ using the chain rule. 3

- (b) Find the directional derivative of

$$f(x, y) = e^{2xy} \text{ at } (0, 1) \text{ in the direction } \theta = \pi/3. \quad 4$$

- (c) Show that the equation $x^3 + y^3 - 3xy - 4 = 0$ determines a function ϕ around the point $x = 2$, such that $\phi(2) = 2$. Find $\phi'(x)$. 3

6. (a) Locate and classify the extreme points of the function $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 5$. 4

- (b) Using double integration, find the area bounded by the parabola $y = x^2$ and the line $y = 2x + 3$. Draw a suitable sketch. 4

- (c) Verify Euler's relation for $u = \sin^{-1}(x/y)$. 2

7. (a) State Schwarz' theorem for the equality of mixed partial derivatives and use it to show that the mixed partial derivatives of $f(x, y) = e^x \cos y - e^y \sin x$ are equal at a point (x, y) . 4

- (b) Let

$$f(x, y) = \frac{(y - x)(1 + x^2)}{(y + x)(1 + y^2)}$$

Find

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) \text{ and } \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right).$$

Does the simultaneous limit of f exist as $(x, y) \rightarrow (0, 0)$? Justify your answer. 4

- (c) Check whether the function

$$F(x, y) = (3x + y^2, 3x^2y + 5) \text{ is conservative. } 2$$

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2017

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरो के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5×2=10

(क) x के 0^+ होने पर $(\cos x)^{\cos x}$ प्रकार 0^0 का अनिर्धार्य रूप होगा।

(ख) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{2x+3} = \frac{-1}{3}$

(ग) यदि

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ और $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, तब $g \circ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

(घ) $f(x, y) = \max. \left\{ \frac{x}{y}, \frac{y}{x} \right\}$ एक समघात फलन है।

(ङ) $(1, 2)$ पर $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ की प्रवणता $(0, 3)$ है।

2. (क) निम्नलिखित की सीमाएँ ज्ञात कीजिए :

5

(i) $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{1/(x-1)}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan 3x}{\tan x}$

(ख) बेलनाकार निर्देशांक का प्रयोग करके निम्नलिखित का मूल्यांकन कीजिए :

5

$$\int_{-2}^2 \int_{\sqrt{-4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{4-x^2-y^2} x^2 dz dy dx$$

3. (क) यदि

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

तब दिखाइए कि $(0, 0)$ पर f अवकलनीय नहीं है ।

5

(ख) बल $F(x, y) = (2xy - x^2, x + y^2)$ द्वारा वामावर्त दिशा में $y = x^2$ और $y^2 = x$ से बने, वक्र C के अनुदिश एक कण को ले जाने में किए गए कार्य की गणना कीजिए । एक उपयुक्त चित्र बनाइए ।

5

4. (क) $(-1, \pi/2, 1)$ पर

बिन्दु $F(x, y, z) = (x \sin yz, 2z^2, 3xy)$ का जैकोबियन ज्ञात कीजिए । वे बिन्दु भी ज्ञात कीजिए जहाँ जैकोबियन शून्य है ।

3

- (ख) समाकलन का क्रम पलट कर निम्नलिखित समाकल का मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin \pi x^3 dx dy$$

समाकलन के प्रदेश का स्थूल चित्र भी बनाइए ।

4

- (ग) $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$ का प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए । इसके स्तर-वक्रों का संक्षेप में वर्णन कीजिए ।

3

5. (क) यदि $u = xy + e^{3x}$, $x = \sin 2t$, $y = \cos t^2$, तब श्रृंखला नियम द्वारा $\frac{du}{dt}$ ज्ञात कीजिए ।

3

- (ख) दिशा $\theta = \pi/3$ में $(0, 1)$ पर $f(x, y) = e^{2xy}$ का दिक्-अवकलज ज्ञात कीजिए ।

4

- (ग) दिखाइए कि समीकरण $x^3 + y^3 - 3xy - 4 = 0$ दिए गए बिन्दु $x = 2$ के आस-पास एक ऐसा फलन ϕ निर्धारित कीजिए जिसके लिए $\phi(2) = 2$. $\phi'(x)$ ज्ञात कीजिए ।

3

6. (क) फलन $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 5$ के चरम बिन्दु निर्धारित करके उन्हें वर्गीकृत कीजिए ।

4

- (ख) द्विशः समाकलन का प्रयोग करके परवलय $y = x^2$ और रेखा $y = 2x + 3$ द्वारा परिबद्ध प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । प्रदेश का एक उपयुक्त स्थूल चित्र भी बनाइए ।

4

- (ग) $u = \sin^{-1}(x/y)$ के लिए ऑयलर संबंध सत्यापित कीजिए ।

2

7. (क) मिश्रित आंशिक अवकलजों की समानता के लिए श्वार्ज प्रमेय का कथन दीजिए और इसका प्रयोग करके दिखाइए कि $f(x, y) = e^x \cos y - e^y \sin x$ के मिश्रित आंशिक अवकलज बिन्दु (x, y) पर बराबर होते हैं । 4

(ख) मान लीजिए

$$f(x, y) = \frac{(y - x)(1 + x^2)}{(y + x)(1 + y^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) \text{ और } \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$$

ज्ञात कीजिए । $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ होने पर क्या f की युगपत् सीमा का अस्तित्व होता है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 4

(ग) जाँच कीजिए कि फलन

$$F(x, y) = (3x + y^2, 3x^2y + 5) \text{ संरक्षी है या नहीं । } 2$$