No. of Printed Pages : 8

MTE-06

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2017

03982

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*
(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 7 is* ***compulsory****. Attempt any* ***four*** *questions from questions no.* ***1*** *to* ***6****. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

---

1. (a) Consider $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, defined by $f(x) = 2x + 3$. Find a mapping $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ such that $fog\,(x) = x$ for all $x \in \mathbf{R}$. *2*

(b) Check whether $x^3 + x + 1 + x^2$ is irreducible over $\mathbf{Q}$ or not. *3*

(c) Let H and K be subgroups of a group G. State and prove a necessary and sufficient condition for HK to be a subgroup of G. *5*

2\. (a) Let G be a group of order 12 and let H and K be subgroups of G of order 4 and 6 respectively. Check whether $H \cap K = \{e\}$ or not. *3*

(b) Consider the ring $R = \{f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}\}$, the set of all mappings from $\mathbf{Z}$ to itself under the usual addition and multiplication defined as the composition of mappings. Find two non-zero mappings $f, g \in R$ such that $f o g = 0$ but $g o f \neq 0$. Further, let I be the set consisting of those elements h of R with $h(x) \neq 0$ only for finitely many integers. Is I an ideal of R ? Give reasons for your answers. *4*

(c) Write the permutation $(1\ \ 2\ \ 3)\ (2\ \ 3\ \ 5)$ as a product of disjoint cycles. Is this permutation even ? Give reasons for your answer. *3*

3\. (a) Prove that if G is a group such that $G/Z(G)$ is cyclic, then G is abelian. Further, give an example, with justification, of a group G for which $G/Z(G)$ is not cyclic. *6*

(b) Consider the ideal $I = 12\mathbf{Z}$ of $\mathbf{Z}$. Find a proper ideal J of $\mathbf{Z}$ such that $I + J = \mathbf{Z}$. *2*

(c) Give two distinct elements of $\mathbf{R}[x]/< x^3 + 1 >$, with justification. *2*

4. (a) Show that if H is a subgroup of G, then so is $x H x^{-1}$, where $x \in G$. Also show that H and $x H x^{-1}$ are isomorphic. 5

(b) Obtain the quotient field F of $\mathbf{Z} + (\sqrt{-3})\mathbf{Z}$. Also find the prime subfield of F. 5

5. (a) Find the nil radical of $(\wp(X), \cup, \cap)$, where X is a non-empty set. 2

(b) Consider $S = \{\bar{1}, \bar{4}, \overline{11}, \overline{14}\} \subseteq \mathbf{Z}_{15}$. Make a Cayley table for S with respect to *, multiplication modulo 15. Use this table to check whether (S, *) is a group. 6

(c) Give an example, with justification, to show that the fundamental theorem of Algebra does not hold true for **Q**. 2

6. (a) Show that $\mathbf{R}[x]/< x^2 + 1 > \simeq \mathbf{C}$, using the fundamental theorem of homomorphism for rings. 7

(b) Find the number of normal subgroups of order 7 and of order 8 of a group of order 35. 3

7. Which of the following statements are *true* and which are *false* ? Justify your answers either with a short proof or with a counter-example. *5×2=10*

(a) If G is a group of order n, then G has an element of order n.

(b) $\mathbf{Z}_4 \simeq A_4$.

(c) If $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbf{Z}[x]$ is irreducible over **Z**, then $\bar{a}_0 + \bar{a}_1x + \ldots + \bar{a}_nx^n$ is irreducible over $\mathbf{Z}_8$.

(d) If $\phi : R \to S$ is a ring homomorphism between two rings with unity, R and S, then $\phi + 1$; defined by $(\phi + 1)(r) = \phi(r) + 1$, is also a ring homomorphism from R to S.

(e) For any two sets A and B, $A \times B = B \times A$.

एम.टी.ई.-06

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2017

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

***नोट :** प्रश्न सं. 7 करना **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।*

---

1. (क) मान लीजिए कि $f(x) = 2x + 3$ द्वारा परिभाषित एक फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ है । एक फलन $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ऐसा ज्ञात कीजिए कि सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए $f \circ g(x) = x$ हो । *2*

(ख) जाँच कीजिए कि $\mathbf{Q}$ पर $x^3 + x + 1 + x^2$ अखंडनीय है या नहीं । *3*

(ग) मान लीजिए कि H और K किसी समूह G के उपसमूह हैं । HK के G का एक उपसमूह होने के लिए एक आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध का कथन दीजिए और उसे सिद्ध कीजिए । *5*

2. (क) मान लीजिए कि G कोटि 12 वाला एक समूह है तथा मान लीजिए कि H और K क्रमशः कोटियों 4 और 6 वाले G के उपसमूह हैं । जाँच कीजिए कि $H \cap K = \{e\}$ है या नहीं । 3

(ख) वलय $R = \{f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}\}$, सामान्य योग तथा फलनों के संयोजन से परिभाषित गुणन के अंतर्गत **Z** से स्वयं तक सभी फलनों के समुच्चय पर विचार कीजिए । दो ऐसे शून्येतर फलन $f, g \in R$ ज्ञात कीजिए कि $fog = 0$ हो परंतु $gof \neq 0$ हो । साथ ही, मान लीजिए कि I, R के ऐसे अवयवों h का समुच्चय है कि $h(x) \neq 0$ केवल परिमित पूर्णांकों के लिए । क्या I, R की एक गुणजावली है ? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए । 4

(ग) क्रमचय (1 2 3) (2 3 5) को असंयुक्त चक्रों के एक गुणनफल के रूप में लिखिए । क्या यह क्रमचय सम है ? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए । 3

3. (क) सिद्ध कीजिए कि यदि G एक ऐसा समूह है कि $G/Z(G)$ चक्रीय है, तो G आबेली होगा । साथ ही, पुष्टि के साथ, एक ऐसे समूह G का उदाहरण दीजिए जिसके कि लिए $G/Z(G)$ चक्रीय नहीं है । 6

(ख) **Z** की गुणजावली $I = 12\mathbf{Z}$ पर विचार कीजिए । **Z** की एक ऐसी उचित गुणजावली J ज्ञात कीजिए जिससे कि $I + J = \mathbf{Z}$ हो । 2

(ग) पुष्टि के साथ, $\mathbf{R}[x]/<x^3 + 1>$ के दो अलग-अलग अवयव दीजिए । 2

4. (क) दर्शाइए कि यदि G का एक उपसमूह H है, तो $x H x^{-1}$ भी उसका एक उपसमूह है, जहाँ $x \in G$ । साथ ही, यह भी दर्शाइए कि H और $x H x^{-1}$ तुल्याकारी हैं । 5

(ख) $\mathbf{Z} + (\sqrt{-3})\mathbf{Z}$ का विभाग क्षेत्र F प्राप्त कीजिए । साथ ही, F का अभाज्य उपक्षेत्र भी ज्ञात कीजिए । 5

5. (क) $(\wp(X), \cup, \cap)$ की शून्य करणी ज्ञात कीजिए, जहाँ X एक अरिक्त समुच्चय है । 2

(ख) $S = \{\bar{1}, \bar{4}, \overline{11}, \overline{14}\} \subseteq \mathbf{Z}_{15}$ पर विचार कीजिए । *, गुणन माड्यूलो 15, के सापेक्ष S के लिए एक कैली सारणी बनाइए । इस सारणी के प्रयोग से जाँच कीजिए कि (S, *) एक समूह है या नहीं । 6

(ग) यह दर्शाने के लिए कि बीजगणित की आधारभूत प्रमेय **Q** के लिए सत्य नहीं है पुष्टि सहित एक उदाहरण दीजिए । 2

6. (क) वलयों के लिए समाकारिता के मूल प्रमेय का प्रयोग करते हुए, दर्शाइए कि $\mathbf{R}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle \simeq \mathbf{C}$. 7

(ख) कोटि 35 वाले एक समूह के कोटि 7 वाले तथा कोटि 8 वाले प्रसामान्य उपसमूहों की संख्या ज्ञात कीजिए । 3

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन *सत्य* हैं और कौन-से कथन *असत्य* ? या तो एक संक्षिप्त उपपत्ति देकर या एक प्रत्युदाहरण देकर, अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए । *5×2=10*

(क) यदि G कोटि n वाला एक समूह है, तो G में कोटि n का एक अवयव होता है ।

(ख) $\mathbf{Z}_4 \simeq A_4$.

(ग) यदि $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbf{Z}[x]$, $\mathbf{Z}$ पर अखंडनीय है, तो $\mathbf{Z}_8$ पर $\bar{a}_0 + \bar{a}_1x + \ldots + \bar{a}_nx^n$ अखंडनीय होगा ।

(घ) यदि $\phi : R \to S$ दो तत्समकी वलयों R और S के बीच एक वलय समाकारिता है, तो $(\phi + 1)(r) = \phi(r) + 1$ द्वारा परिभाषित फलन $\phi + 1$ भी R से S तक एक वलय समाकारिता है ।

(ङ) किन्हीं दो समुच्चयों A और B के लिए $A \times B = B \times A$ होता है ।