

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination**

05242

**December, 2017**

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS  
MTE-01 : CALCULUS**

*Time : 2 hours*

*Maximum Marks : 50*

*(Weightage : 70%)*

---

**Note :** *Question no. 1 is compulsory. Attempt any four questions from questions no. 2 to 7. Use of calculators is not allowed.*

---

1. Which of the following statements are *true* or *false*? Justify your answers. 5×2=10

(i) If  $f$  and  $g$  are functions on  $\mathbf{R}$ , defined by  $f(x) = 2x - 5$  and  $g(x) = 3|x - 2|$ , then  $(g \circ f)(3) = -3$ .

(ii) A monotonic function must be continuous.

(iii) The function  $f$ , given by  $f(x) = \cos x$ , has a minima at two points in  $[0, 2\pi]$ .

(iv) The curve given by  $y = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 6x + 7)$

has a point of inflection.

(v)  $\frac{d}{dx} \left[ \int_2^{\ln x} t e^{2t+3} dt \right] = x e^3 - e^7$ .

2. (a) Given a function  $f$ , defined on  $\mathbf{R}$  by

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}, \quad l = 1 \text{ and } \varepsilon = 0.1, \text{ find } k > 0$$

such that  $x > k \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ . 3

- (b) Evaluate : 5

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x^2+9)}$$

- (c) Differentiate  $\sin^{-1}(\sqrt{1-x^2})$  with respect to  $\cos^{-1}(2x^2-1)$ . 2

3. Trace the curve  $y^2(x+1) = x^2(2-x)$ , clearly stating all the properties used in the process. 10

4. (a) Find the intervals of  $\mathbf{R}$ , where the function  $f$ , defined by  $f(x) = 2x^3 - 24x + 15$ , is increasing or decreasing. 3

- (b) By dividing the interval  $[1, 5]$  into four equal parts, find the approximate value of  $\int_1^5 \frac{dx}{x^2+3}$ , using the Simpson's rule. 3

- (c) Let  $f$  and  $h$  be functions, defined on  $\mathbf{R}$  by  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$  and

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-3} & , \text{ for } x \neq 3, \\ k & , \text{ for } x = 3. \end{cases}$$

- (i) Find all the roots of  $f(x) = 0$ .
- (ii) Find the value of  $k$  that makes  $h$  continuous at  $x = 3$ .
- (iii) Using the value of  $k$  found in (ii) above, determine if  $h$  is an even function or not. 4

5. (a) Find the area of a loop of the curve,  $r = 3 \sin 3\theta$ . 4

- (b) By considering the function  $f$  given by  $f(x) = (x-2) \ln x$  in  $[1, 2]$ , show that the equation  $x \ln x = 2 - x$  is satisfied by at least one value of  $x$  lying in the interval  $]1, 2[$ . 3

- (c) Evaluate : 3

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan \theta) d\theta$$

6. (a) If  $y = e^{m \cot^{-1} x}$ , find an equation relating the derivatives  $y_{n+1}$ ,  $y_n$  and  $y_{n-1}$  of  $y$ . 4

- (b) Find the maximum possible domain, and the corresponding range of the function  $f$  given by

$$f(x) = \frac{1}{1 + \cos x} . \quad 3$$

- (c) Find the volume of the solid generated by the revolution of the curve,  $(1 - x) y^2 = x$ , about its asymptote. 3

7. (a) Obtain a reduction formula for

$$I_n = \int_0^{\pi/2} e^{-x} \cos^n x \, dx .$$

Hence find the value of  $I_4$ . 6

- (b) Find the approximate value of  $(0.99)^{7/2}$  by taking the first three terms of Maclaurin's series for  $(1 - x)^{7/2}$ . 4
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम  
(बी.डी.पी.)  
सत्रांत परीक्षा  
दिसम्बर, 2017

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित  
एम.टी.ई.-01 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50  
(कुल का : 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरो का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं या असत्य? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए। 5×2=10
- (i) यदि  $f$  और  $g$ ,  $\mathbf{R}$  पर  $f(x) = 2x - 5$  और  $g(x) = 3|x - 2|$  द्वारा परिभाषित फलन हैं, तो  $(g \circ f)(3) = -3$  है।
- (ii) एक एकदिष्ट फलन संतत होना चाहिए।
- (iii)  $f(x) = \cos x$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$  के  $[0, 2\pi]$  में दो बिंदुओं पर निम्निष्ठ मान होते हैं।
- (iv) वक्र  $y = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 6x + 7)$  का एक नतिपरिवर्तन बिंदु है।
- (v)  $\frac{d}{dx} \left[ \int_2^{\ln x} t e^{2t+3} dt \right] = x e^3 - e^7.$

2. (क)  $\mathbf{R}$  पर  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$  द्वारा परिभाषित एक फलन  $f$

दिया गया है,  $l = 1$  और  $\varepsilon = 0.1$  हैं,  $k > 0$  ज्ञात

कीजिए जबकि  $x > k \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ . 3

(ख) मूल्यांकन कीजिए : 5

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x^2+9)}$$

(ग)  $\sin^{-1}(\sqrt{1-x^2})$  को  $\cos^{-1}(2x^2-1)$  के सापेक्ष

अवकलित कीजिए । 2

3. वक्र आरेखण की प्रक्रिया में प्रयोग किए गए सभी गुणधर्मों को स्पष्ट लिखते हुए वक्र  $y^2(x+1) = x^2(2-x)$  का आरेखण कीजिए । 10

4. (क)  $\mathbf{R}$  का वह अंतराल ज्ञात कीजिए, जहाँ

$f(x) = 2x^3 - 24x + 15$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$  वर्धमान या हासमान है । 3

(ख) अंतराल  $[1, 5]$  को चार बराबर भागों में विभाजित करते

हुए, सिम्पसन नियम द्वारा  $\int_1^5 \frac{dx}{x^2+3}$  का सन्निकट मान

ज्ञात कीजिए । 3

- (ग) मान लीजिए  $\mathbf{R}$  पर परिभाषित फलन  $f$  और  $h$  निम्नलिखित हैं :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \text{ और}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-3} & , \quad x \neq 3 \text{ के लिए,} \\ k & , \quad x = 3 \text{ के लिए।} \end{cases}$$

- (i)  $f(x) = 0$  के सभी मूल ज्ञात कीजिए ।  
(ii)  $k$  का वह मान ज्ञात कीजिए जिससे  $h, x = 3$  पर संतत होगा ।  
(iii) उपर्युक्त (ii) में प्राप्त  $k$  के मान का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए कि  $h$  एक सम फलन है या नहीं । 4

5. (क) वक्र  $r = 3 \sin 3\theta$  के एक पाश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 4

- (ख)  $f(x) = (x-2) \ln x$  द्वारा  $[1, 2]$  पर परिभाषित फलन  $f$  को मानकर यह दर्शाइए कि समीकरण  $x \ln x = 2 - x$ , अंतराल  $]1, 2[$  में होने वाले  $x$  के कम-से-कम एक मान के लिए संतुष्ट होती है । 3

- (ग) मूल्यांकन कीजिए : 3

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan \theta) d\theta$$

6. (क) यदि  $y = e^{m \cot^{-1} x}$  है, तो  $y$  के अवकलजों  $y_{n+1}$ ,  $y_n$  और  $y_{n-1}$  में सम्बन्ध स्थापित करने वाला समीकरण ज्ञात कीजिए । 4

(ख)  $f(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$  का अधिकतम संभव प्रांत और तदानुसार गोचर (परास) ज्ञात कीजिए । 3

(ग) वक्र  $(1 - x)y^2 = x$  के अपनी अनंतस्पर्शी के सापेक्ष घूर्णन से जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए । 3

7. (क)  $I_n = \int_0^{\pi/2} e^{-x} \cos^n x \, dx$  का समानयन सूत्र प्राप्त कीजिए । इस प्रकार  $I_4$  का मान ज्ञात कीजिए । 6

(ख)  $(1 - x)^{7/2}$  की मैक्लॉरिन श्रेणी के प्रथम तीन पदों को लेकर  $(0.99)^{7/2}$  का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए । 4