No. of Printed Pages : 8

PHE-14

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

December, 2016

01964

PHYSICS

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-III

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt **all** questions. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.*

1. Attempt any ***five*** parts : *5×2=10*

(a) Define hermitian matrix. Show that the matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$ is hermitian.

(b) Define symmetric and antisymmetric tensors.

(c) Show that each element in an abelian group is a class by itself.

(d) Calculate the residue of the function

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1 - 2z}.$$

(e) Show that $\oint \frac{dz}{z^2} = 0$ for a unit circle with centre at the origin.

(f) Obtain the Laplace transform of $5 + 2\,e^{3t}$.

(g) Determine Fourier sine transform of the function

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

(h) Using the Rodrigues' formula for Legendre polynomials

$$P_n(x) = \frac{1}{(2^n)\,n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

obtain the value of $P_2(x)$.

2. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) Determine the eigenvalues and eigenvectors of the following matrix : *5*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Prove that the eigenvalues of a hermitian matrix are real. *5*

(c) (i) Define a cyclic group. Give one example. *2*

(ii) Show that {1, –1} is a subgroup of the multiplicative group {1, i, –1, – i}. *3*

3. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) Using the method of residues, evaluate the contour integral $\int_C \frac{e^{iz}}{(z^2+1)} dz$, where C is defined by $|z| < 4$.

(b) Evaluate the following integral :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$$

(c) Obtain the Taylor series expansion of $\cos^2 z$ about $z = 0$.

4. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) Obtain the Fourier transform of the function

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

(b) Determine the inverse Laplace transform of $\frac{s-3}{s^2-1}$.

(c) Solve the following differential equation using Laplace transform method :

$$y'' - 4y = 4e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

5. Attempt any ***one*** part : *1×10=10*

(a) Using the generating relation for Legendre polynomials

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$$

derive the recurrence relation

$(2n + 1)\, x\, P_n(x) = (n + 1)\, P_{n+1}(x) + n\, P_{n-1}(x)$.

(b) Using the representation

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

show that

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \text{ and}$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2016

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : ***सभी*** *प्रश्न कीजिए । प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।*

---

1. कोई ***पाँच*** भाग कीजिए : *5×2=10*

(क) हर्मिटी आव्यूह की परिभाषा दीजिए । सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$ हर्मिटी है ।

(ख) सममित और प्रतिसममित टेन्सरों की परिभाषा दीजिए ।

(ग) सिद्ध कीजिए कि एक आबेली समूह का प्रत्येक अवयव स्वयं में एक वर्ग होता है ।

(घ) फलन $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1 - 2z}$ का अवशिष्ट परिकलित कीजिए ।

(ङ) एक एकक वृत्त के लिए जिसका केन्द्र मूल-बिन्दु पर है, सिद्ध कीजिए कि $\oint \frac{dz}{z^2} = 0$.

(च) $5 + 2\,e^{3t}$ का लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए ।

(छ) निम्नलिखित फलन का फूरिये ज्या-रूपांतर निर्धारित कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(ज) लेजान्ड्रे बहुपदों के लिए रोड्रिगेज़ सूत्र

$$P_n(x) = \frac{1}{(2^n)\,n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

का उपयोग कर $P_2(x)$ का मान प्राप्त कीजिए ।

2. कोई ***दो*** भाग कीजिए : *2×5=10*

(क) निम्नलिखित आव्यूह के आइगेनमान और आइगेनसदिश निर्धारित कीजिए : *5*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि हर्मिटी आव्यूह के आइगेनमान वास्तविक होते हैं । *5*

(ग) (i) चक्रीय समूह की परिभाषा दीजिए । एक उदाहरण दीजिए । *2*

(ii) सिद्ध कीजिए कि {1, –1} गुणनात्मक समूह {1, i, –1, – i} का एक उपसमूह है । *3*

3. कोई *दो* भाग कीजिए : *2×5=10*

(क) अवशिष्ट विधि का उपयोग कर, निम्नलिखित कंटूर समाकल का मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_C \frac{e^{iz}}{(z^2+1)} dz, \text{ जहाँ } C, |z| < 4 \text{ द्वारा परिभाषित है ।}$$

(ख) निम्नलिखित समाकल का मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$$

(ग) $z = 0$ के प्रति $\cos^2 z$ का टेलर श्रेणी प्रसार प्राप्त कीजिए ।

4. कोई *दो* भाग कीजिए : *2×5=10*

(क) निम्नलिखित फलन का फूरिये रूपांतर प्राप्त कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

(ख) निम्नलिखित फलन का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर निर्धारित कीजिए :

$$\frac{s-3}{s^2-1}$$

(ग) लाप्लास रूपांतर विधि का उपयोग कर निम्नलिखित अवकल समीकरण हल कीजिए :

$$y'' - 4y = 4e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

5. कोई **एक** भाग कीजिए : *1×10=10*

(क) लेजान्ड्रे बहुपदों के लिए जनक संबंध

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$$

का उपयोग कर निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध व्युत्पन्न कीजिए :

$$(2n+1)\, x\, P_n(x) = (n+1)\, P_{n+1}(x) + n\, P_{n-1}(x).$$

(ख) निम्नलिखित निरूपण का उपयोग कर

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

सिद्ध कीजिए कि

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \sin x \text{ और}$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \cos x.$$