No. of Printed Pages : 16 **MTE-14**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

00464

December, 2016

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*
(Weightage : 70%)

Note : *Answer any* ***five*** *questions. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

1. (a) A particle is projected vertically upwards with a velocity u m/sec. After t seconds, another particle is projected upwards from the same point and with the same velocity. Prove that the particles will meet at a height $\frac{4u^2 - g^2t^2}{8g}$ metres after a time $\left(\frac{t}{2} + \frac{u}{g}\right)$ seconds from the start. *3*

(b) Discuss the following market which is characterized by lagged supply response : *3*

$$D_t = 50 - 15p_t$$

$$S_t = 5 + 9p_{t-1}$$

(c) Consider arterial blood viscosity $\mu = 0{\cdot}02$ poise. If the length of the artery is $2{\cdot}5$ cm, radius is 8×10^{-3} cm and $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dynes/cm^2, then find

(i) maximum peak velocity of blood, and

(ii) the shear stress at the wall. *4*

2. (a) A particle is thrown over the wall and has a height b at a distance a after crossing it. If the particle strikes the ground at a distance c from the point of projection, then prove that the angle of projection is $\tan^{-1} \dfrac{bc}{a(c-a)}$ and the velocity of projection V is given by

$$\frac{2V^2}{g} = \frac{a^2(c-a)^2 + b^2c^2}{ab(c-a)}.$$ *5*

(b) Bacteria cells grow at a rate proportional to the volume of dividing cells at that moment. If V_0 is the volume of dividing cells at the initial time t_0, then find the volume of dividing cells at any time t. Find the time at which the volume of the cells will be double its original size. *3*

(c) State the limitations of Markowitz model for the selection of optimal portfolio of risky securities. *2*

3. (a) Consider the motion of a simple pendulum. Write the differential equation describing the motion of the simple pendulum with initial conditions $\theta = \theta_0$ at $t = 0$ and $\frac{d\theta}{dt} = 0$ at $t = 0$, for both the linear and non-linear models. Give the expressions for the time periods for both the cases. In the linear case, derive the time period. Suppose the length of the pendulum is doubled, then find the time period of the pendulum in both the cases. *5*

(b) An ideal market is supplied by 200 firms, each with supply function

$$S(p) = \begin{cases} 5p - 4 & p \geq 1 \\ 0 & p < 1, \end{cases}$$

where p is the price. The aggregate demand function is $D(p) = -400p + 4800$. Find the equilibrium price. *2*

(c) In a population of birds, the proportionate birth rate and death rate are 0·4 and 0·6 per year, respectively. Immigration occurs at a constant rate of 3000 birds per year and emigration at a constant rate of 2000 birds per year. Formulate the governing equations of the model and solve it. Describe the long-term behaviour of the population, when initial population is 4000. *3*

4\. (a) For the pay-off matrix given below, transform the matrix game into corresponding linear programming problems for player A and player B : *4*

		Player B 1	2	3
Player A	1	3	−7	8
	2	−8	8	−9
	3	9	−10	11

(b) Suppose the populations x and y satisfy the equations

$$\frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy$$

Find all critical points of the system. Which critical point represents the possibility of co-existence of two species ? Discuss the type and stability of that critical point. *6*

5. (a) If the phytoplankton be limited to grow in one-dimension, say along x-axis, then the diffusion equation of the organism concentration C is then given by the formulation

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \alpha C,$$

where α is the growth rate and D the constant diffusivity. The interchange between the internal growth and loss of phytoplanktons has been going on for a long time (a steady state has been reached). Find a solution of the mathematical formulation with boundary conditions $C = 0$ at $x = 0$ and $x = L$. *2*

(b) Sulphur dioxide is emitted at a rate of 260 g/s from a stack with an effective height of 80 m. The wind velocity at a stack is 6 m/s and the atmospheric stability class D for the overcast day. Determine the ground level concentration along the centre line at a distance 900 m from a stack, in micrograms per cubic metre.

Hint : (σ_y = 69 m and σ_z = 29·5 m are the standard deviations in the vertical direction and cross wind direction, respectively). *4*

(c) Suppose the quarterly sales for a particular make of a car in Delhi were 2682, 2462 and 3012, respectively. From past data prior to these three data points, a straight line was the fit. The value on the line corresponding to the last observed time is 2988, and the slope is 80. Use exponential smoothing based upon the three observations given above to forecast sales for the quarterly period following these observations, using $\alpha = \beta = 0{\cdot}2$. 4

6. (a) The return distribution of securities 1 and 2 is as follows :

Event (j)	Chance ($P_{1j} = P_{2j}$)	Return	
		R_{1j}	R_{2j}
1	0·33	19	18
2	0·25	17	16
3	0·17	11	11
4	0·25	10	9

Find which security is more risky in the Markowitz's sense. 6

(b) Suppose a string of length l is connected to a fixed point at one end and to a stick of mass m at the other. The stick is whirling in a circle at constant velocity v. Using dimensional analysis, find the force in the string. 4

7\. (a) The mean arrival rate to a service centre is 3 per hour. The mean service time is found to be 10 minutes for service. Assuming Poisson arrival and exponential service time, find

(i) utilization factor for this service facility,

(ii) probability of two units in the system,

(iii) expected number of units in the system, and

(iv) expected time in hours that a customer has to spend in the system. *5*

(b) Modelling a problem can be done in several ways. Given below are the different problems related to tumour growth. Identify the type of model (deterministic, continuous, stochastic or discrete) which is most appropriate in each of the following situations :

(i) Effect of treatment given at regular intervals.

(ii) Effect of drugs on a patient who is given the drug for a given duration of time.

(iii) Effect of radiation on tumour cells : some cells may continue to grow but some may be damaged. *3*

(c) Write the difference between the Geocentric model and the Heliocentric model used to study the solar system. *2*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।*

---

1. (क) एक कण को ऊर्ध्वाधरतः वेग u m/sec के साथ ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया जाता है । t सेकण्ड के बाद, उसी वेग के साथ और उसी बिंदु से दूसरा कण ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया जाता है । सिद्ध कीजिए कि दोनों कण फेंके जाने के $\left(\frac{t}{2} + \frac{u}{g}\right)$ सेकण्ड के बाद $\frac{4u^2 - g^2t^2}{8g}$ मीटर ऊँचाई पर मिलेंगे । 3

(ख) निम्नलिखित बाज़ार की विवेचना कीजिए जो पश्चायित पूर्ति अनुक्रिया से अभिलक्षणित होती है : 3

$$D_t = 50 - 15p_t$$

$$S_t = 5 + 9p_{t-1}$$

(ग) रक्त-धमनी की श्यानता $\mu = 0{\cdot}02$ पॉयज़ लीजिए । यदि धमनी की लंबाई 2·5 सेमी, त्रिज्या 8×10^{-3} सेमी और $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dynes/cm^2 हो, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

(i) रक्त का अधिकतम शिखर वेग, और

(ii) दीवार पर अपरूपण प्रतिबल । 4

2. (क) एक कण को दीवार के ऊपर फेंका गया और दीवार को पार करने के बाद दूरी a पर कण की ऊँचाई b है । यदि कण प्रक्षेप बिंदु से दूरी c पर ज़मीन पर गिरता है, तब सिद्ध कीजिए कि प्रक्षेप-कोण $\tan^{-1} \dfrac{bc}{a(c-a)}$ होगा और प्रक्षेप के समय कण का वेग V, $\dfrac{2V^2}{g} = \dfrac{a^2(c-a)^2 + b^2c^2}{ab(c-a)}$ से प्राप्त होगा । 5

(ख) बैक्टीरिया कोशिकाएँ उस क्षण में विभाजक कोशिकाओं के आयतन की समानुपाती दर से बढ़ती हैं । यदि प्रारंभिक समय t_0 पर विभाजक कोशिकाओं का आयतन V_0 हो, तो किसी समय t पर विभाजक कोशिकाओं का आयतन ज्ञात कीजिए । वह समय ज्ञात कीजिए जब कोशिकाओं का आयतन उसके मूल आमाप का दुगुना हो जाएगा । *3*

(ग) जोख़िम प्रतिभूतियों की इष्टतम निवेश-सूची का चयन करने के लिए मार्कोविच निदर्श की सीमाओं का कथन दीजिए । *2*

3. (क) एक सरल लोलक की गति लीजिए । रैखिक और अरैखिक निदर्श दोनों के लिए प्रारंभिक प्रतिबंधों $t = 0$ पर $\theta = \theta_0$ और $t = 0$ पर $\frac{d\theta}{dt} = 0$ के अधीन सरल लोलक की गति का वर्णन करते हुए अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए । दोनों स्थितियों की समयावधियों के लिए व्यंजक दीजिए । रैखिक स्थिति में, समयावधि व्युत्पन्न कीजिए । मान लीजिए लोलक की लम्बाई दुगुनी कर दी जाए, तो दोनों स्थितियों में लोलक की समयावधि ज्ञात कीजिए । *5*

(ख) एक आदर्श बाज़ार की पूर्ति 200 फर्में करती हैं, जिनमें से प्रत्येक का पूर्ति फलन यह है

$$S(p) = \begin{cases} 5p - 4 & p \geq 1 \\ 0 & p < 1, \end{cases}$$

जहाँ p कीमत है । कुल माँग फलन

$D(p) = -400p + 4800$. संतुलन कीमत ज्ञात कीजिए । *2*

(ग) पक्षियों की समष्टि में, प्रति वर्ष आनुपातिक जन्म-दर और मृत्यु-दर क्रमशः 0·4 और 0·6 हैं । पक्षियों का आप्रवासन 3000 पक्षी प्रति वर्ष की अचर दर से और उत्प्रवासन 2000 पक्षी प्रति वर्ष की अचर दर से होता है । निदर्श को निर्धारित करने वाले समीकरणों को सूत्रित कीजिए और इसे हल कीजिए । समष्टि के दीर्घकालिक व्यवहार का वर्णन कीजिए, जबकि प्रारंभिक समष्टि 4000 हो । 3

4. (क) नीचे दिए गए भुगतान आव्यूह के लिए आव्यूह खेल को खिलाड़ी A और खिलाड़ी B की संगत रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं में रूपांतरित कीजिए : 4

खिलाड़ी B

		1	2	3
खिलाड़ी A	1	3	−7	8
	2	−8	8	−9
	3	9	−10	11

(ख) मान लीजिए समष्टि x और y निम्नलिखित समीकरणों को संतुष्ट करती हैं :

$$\frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy$$

निकाय के सभी क्रांतिक बिन्दु ज्ञात कीजिए । कौन-सा क्रांतिक बिन्दु इन दोनों स्पीशीज़ के सह-अस्तित्व की संभावना को निरूपित करता है ? उस क्रांतिक बिन्दु के प्रकार और स्थायित्व पर चर्चा कीजिए । 6

5. (क) यदि फाइटोप्लैंकटन (पादपप्लवक) की वृद्धि एकविम तक ही सीमित है, मान लीजिए x-अक्ष की ओर, तब जीव-सांद्रण C का विसरण समीकरण निम्नलिखित सूत्र द्वारा दिया जाता है :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \alpha C,$$

जहाँ α वृद्धि दर है और D अचर विसरणशीलता है। फाइटोप्लैंकटन (पादपप्लवक) की आंतरिक वृद्धि और उनकी हानि के बीच लंबे समय से परस्पर विनिमय होता रहा है (एक अपरिवर्ती अवस्था पहुँच गई है)। सीमा प्रतिबंधों $x = 0$ और $x = L$ पर $C = 0$ के अधीन गणितीय सूत्रण का हल ज्ञात कीजिए। *2*

(ख) 80 m की प्रभावी ऊँचाई वाले एक स्टैक से 260 g/s की दर से सल्फर डाइऑक्साइड उत्सर्जित हो रही है। स्टैक पर पवन वेग 6 m/s है और बादल छाए हुए दिन में वायुमंडलीय स्थायित्व वर्ग D है। माइक्रोग्राम प्रति घन मीटर में स्टैक से 900 m की दूरी पर केन्द्र रेखा के अनुदिश भूमि तल सांद्रण निर्धारित कीजिए।
संकेत : ($\sigma_y = 69$ m और $\sigma_z = 29{\cdot}5$ m क्रमशः ऊर्ध्वाधर दिशा और अनुप्रस्थ पवन दिशा में मानक विचलन हैं)। *4*

(ग) मान लीजिए दिल्ली में एक कार की तिमाही बिक्री क्रमशः 2682, 2462 और 3012 थी । पिछले आँकड़ों (इन तीन आँकड़ों बिंदुओं से पहले) से एक सरल रेखा आसंजित की गई थी । रेखा पर अंतिम प्रेक्षित समय का संगत मान 2988 है और प्रवणता 80 है । $\alpha = \beta = 0{\cdot}2$ मानकर इन प्रेक्षणों की तिमाही अवधि की बिक्रियों का पूर्वानुमान लगाने के लिए ऊपर दिए गए तीन प्रेक्षणों पर आधारित चरघातांकी मसृणीकरण का प्रयोग कीजिए । 4

6. (क) प्रतिभूतियों 1 और 2 का प्रतिफल बंटन इस प्रकार है :

घटना (j)	संयोग $(P_{1j} = P_{2j})$	प्रतिफल	
		R_{1j}	R_{2j}
1	0·33	19	18
2	0·25	17	16
3	0·17	11	11
4	0·25	10	9

ज्ञात कीजिए मार्कोविच के अनुसार कौन-सी प्रतिभूति ज़्यादा जोख़िम-पूर्ण है । 6

(ख) मान लीजिए लंबाई l के धागे को एक सिरे पर नियत बिंदु से और दूसरे सिरे पर द्रव्यमान m की छड़ी से जोड़ा जाता है । छड़ी एकसमान (अचर) वेग v से वृत्ताकार घूम रही है । धागे में बल ज्ञात करने के लिए विमीय विश्लेषण का प्रयोग कीजिए । 4

7. (क) किसी सेवा केन्द्र पर माध्य आगमन दर 3 प्रति घंटा है । माध्य सेवा समय 10 मिनट प्रति सेवा है । प्वासों आगमन और चरघातांकीय सेवा समय की कल्पना करते हुए निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

(i) इस सेवा सुविधा के लिए उपयोग गुणक,

(ii) प्रणाली में दो इकाइयों की प्रायिकता,

(iii) प्रणाली में इकाइयों की प्रत्याशित संख्या, तथा

(iv) प्रणाली में एक ग्राहक द्वारा घंटों में व्यतीत किया जाने वाला प्रत्याशित समय । *5*

(ख) समस्या का निदर्शन कई विधियों से किया जा सकता है । नीचे हमने ट्यूमर वृद्धि से संबंधित विभिन्न समस्याएँ दी हैं । निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थितियों में निदर्श के सबसे उत्तम प्रकार (निर्धारणात्मक, संतत, प्रसंभाव्य या असंतत) को पहचानिए :

(i) नियमित अंतरालों पर दिए गए उपचार का प्रभाव ।

(ii) एक रोगी जिसे नियत अवधि तक दवा दी गई हो उस पर दवा का प्रभाव ।

(iii) ट्यूमर कोशिकाओं पर विकिरण का प्रभाव : कुछ कोशिकाओं की वृद्धि जारी रह सकती है जबकि कुछ को क्षति हो सकती है । *3*

(ग) सौर परिवार का अध्ययन करने के लिए प्रयुक्त होने वाले भूकेंद्रीय निदर्श और सूर्यकेंद्रीय निदर्श के बीच अंतर लिखिए। 2