

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

December, 2016

00734

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS**

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 1 is compulsory. Attempt any four questions from questions no. 2 to 7. Use of calculators is not allowed.*

1. Which of the following statements are *True* and which ones are *False* ? Justify your answer. $5 \times 2 = 10$
- (a) $P(x) : x^2 + 49 > 14x$, for all $x \geq 8$.
 - (b) $a_n + 6a_{n-1} + 18a_{n-3} = 0$ is a homogeneous recurrence relation of order 2.
 - (c) Every acyclic graph has a spanning tree.
 - (d) 3 cars can be painted in $C(6, 3)$ ways from 6 different colours, if each car gets a different colour.
 - (e) Every Hamiltonian graph is planar.

2. (a) Find DNF of the following Boolean expression : 3

$$X(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2' \vee x_3)'$$

- (b) Solve the recurrence

$$4x_n + 8x_{n-1} + 3x_{n-2} = 0, \quad n \geq 2. \quad 3$$

- (c) Show that the number of vertices of degree 1 in any tree is $1 + \frac{1}{2} \sum_{v \in V} |d(v) - 2|$, where

V is the set of vertices of the tree. 4

3. (a) In a room, n people are shaking hands. If any two people shake hands at most once, show that there will always be at least two people in the room who have shaken hands the same number of times. 3

- (b) If the letters A, B, C, D, E, F, G are arranged on a circle, how many arrangements are possible if A and C are always adjacent to each other? 3

- (c) Construct a graph G on 8 vertices with the following properties : 4

Edge-connectivity of $G = 2$, vertex connectivity of $G = 1$ and the degree of every vertex of $G \geq 3$.

4. (a) Find the sequence $\{a_n\}$ having the generating function G given by

$$G(z) = \frac{3}{(1-z)^2} + \frac{z}{1-2z}. \quad 3$$

(b) Solve the recurrence

$$a_n + 2a_{n-1} - 15a_{n-2} = 4(3)^n, n \geq 2. \quad 5$$

(c) Check whether the complement of C_5 is isomorphic to C_5 or not. 2

5. (a) Prove that

$$S_n^2 = 2^{n-1} - 1, \forall n \geq 2. \quad 4$$

(b) Write negation and converse of $p \rightarrow (q \rightarrow r)$. 3

(c) Let $g(n)$ be defined by the following recurrence relation :

$$g(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1 \\ g(n-1) + 6n - 6, & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

Also let $f(n) = 3n^2 - 3n + 1$. Using the principle of induction, prove that $f(n) = g(n)$, for all $n \geq 1$. 3

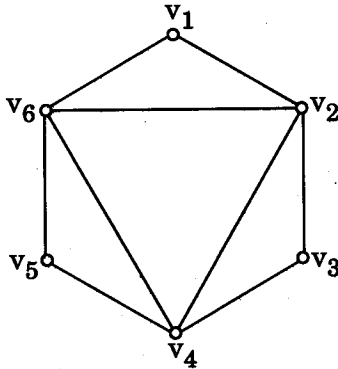
6. (a) Find the number of integer solutions to the equation $x + y + z = 20$ with $0 < x \leq 7$, $0 < y \leq 8$, $0 < z$. 5

(b) Test the validity of the following argument :

“If US tightens visa restrictions, then the demand for BPO will increase. Either US tightens visa restrictions or some computer companies in India will close down. The demand for BPO will not increase. Therefore, some computer companies in India will close down.” 5

7. (a) Check whether the following graph is edge traceable or not :

2



- (b) Let a_n denote the number of ways of climbing a staircase with n steps such that one step or two steps are taken at a time. Find a recurrence relation for a_n and initial conditions that would be required for solving it.

4

- (c) Consider a planar (p, q) – graph G . Suppose each region of G is bounded by a cycle of length 3. By counting the sum of the lengths of cycles bounding each region, show that $2q = 3r$, where r is the number of regions.

4

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50
(कुल का : 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 करना अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से कोई चार प्रश्न कीजिए। कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5×2=10
 - (क) सभी $x \geq 8$ के लिए, $P(x) : x^2 + 49 > 14x$.
 - (ख) $a_n + 6a_{n-1} + 18a_{n-3} = 0$ कोटि 2 वाला समघात पुनरावृत्ति संबंध है।
 - (ग) प्रत्येक अचक्रीय ग्राफ का जनक वृक्ष होता है।
 - (घ) 6 विभिन्न रंगों में से 3 कारों को $C(6, 3)$ तरीकों से रंगा जा सकता है, यदि प्रत्येक कार को भिन्न रंग मिले।
 - (ङ) प्रत्येक हैमिल्टोनियन ग्राफ समतलीय होता है।

2. (क) निम्नलिखित बूलीय व्यंजक का DNF ज्ञात कीजिए : 3

$$X(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2' \vee x_3)'$$

- (ख) पुनरावृत्ति $4x_n + 8x_{n-1} + 3x_{n-2} = 0, n \geq 2$ को हल कीजिए । 3

- (ग) दिखाइए कि किसी भी वृक्ष में कोटि 1 वाले शीर्षों की संख्या $1 + \frac{1}{2} \sum_{v \in V} |d(v) - 2|$ है, जहाँ V वृक्ष के शीर्षों का समुच्चय है । 4

3. (क) एक कमरे में, n लोग हाथ मिला रहे हैं । यदि कोई दो लोग अधिक-से-अधिक एक बार हाथ मिलाते हैं, तो दिखाइए कि हमेशा कमरे में कम-से-कम दो लोग ऐसे होंगे जिन्होंने समान बार हाथ मिलाया है । 3

- (ख) यदि अक्षर A, B, C, D, E, F, G वृत्तीय विन्यास में हैं और यदि हमेशा A और C एक-दूसरे के अगल-बगल में हैं, तो कितने विन्यास संभव हैं ? 3

- (ग) 8 शीर्षों पर ग्राफ G बनाइए जिसमें निम्नलिखित गुणधर्म हों :
 G का कोर-संबद्धतांक = 2, G का शीर्ष संबद्धतांक = 1
 और G के प्रत्येक शीर्ष की कोटि ≥ 3 है । 4

4. (क) वह अनुक्रम $\{a_n\}$ ज्ञात कीजिए जिसका जनक फलन G निम्न प्रकार है :

$$G(z) = \frac{3}{(1-z)^2} + \frac{z}{1-2z} \quad 3$$

(ख) पुनरावृत्ति $a_n + 2a_{n-1} - 15a_{n-2} = 4(3)^n$, $n \geq 2$
को हल कीजिए । 5

(ग) जाँच कीजिए कि C_5 का पूरक C_5 के तुल्याकारी है या नहीं । 2

5. (क) सिद्ध कीजिए कि
$$S_n^2 = 2^{n-1} - 1, \forall n \geq 2.$$
 4

(ख) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ के निषेध और विलोम लिखिए । 3

(ग) मान लीजिए $g(n)$ निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध द्वारा परिभाषित है :

$$g(n) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } n=1 \\ g(n-1) + 6n - 6, & \text{यदि } n > 1 \end{cases}$$

यह भी मान लीजिए $f(n) = 3n^2 - 3n + 1$. आगमन नियम से सिद्ध कीजिए कि सभी $n \geq 1$ के लिए,
 $f(n) = g(n)$. 3

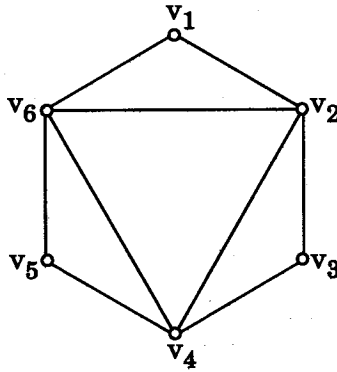
6. (क) समीकरण $x + y + z = 20$, जहाँ $0 < x \leq 7$, $0 < y \leq 8$,
 $0 < z$, के पूर्णांक हलों की संख्या ज्ञात कीजिए । 5

(ख) निम्नलिखित तर्क की मान्यता की जाँच कीजिए :

“यदि US वीजा नियमों को सख्त करता है, तो BPO की आवश्यकता बढ़ जाएगी । या तो US वीजा नियमों को सख्त करता है या भारत में कुछ कम्प्यूटर कंपनियाँ बंद हो जाएँगी । BPO की आवश्यकता नहीं बढ़ेगी । अतः भारत में कुछ कम्प्यूटर कंपनियाँ बंद हो जाएँगी ।” 5

7. (क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित ग्राफ़ कोर अनुरेखीय है या नहीं :

2



- (ख) मान लीजिए a_n , n सीढ़ियों वाली सीढ़ियों को चढ़ने के तरीकों की संख्या को निरूपित करता है, जबकि एक समय में एक या दो सीढ़ियाँ चढ़ सकते हैं। a_n के लिए पुनरावृत्ति संबंध ज्ञात करने के साथ-साथ इसे हल करने के लिए ज़रूरी आदि प्रतिबंध भी बताइए।

4

- (ग) एक समतलीय (p, q) - ग्राफ़ G लीजिए। मान लीजिए कि G का प्रत्येक क्षेत्र लंबाई 3 के एक चक्र से परिवद्ध है। प्रत्येक क्षेत्र को परिवद्ध करने वाले चक्रों की लंबाइयों के योगफल के गणन द्वारा दर्शाइए कि $2q = 3r$ है, जहाँ r क्षेत्रों की संख्या है।

4