

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)****Term-End Examination**

00094

December, 2016**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage : 70%)*

Note : Question no. 7 is **compulsory**. Answer any **four** questions from questions no. 1 to 6. Use of calculators is **not** allowed.

1. (a) For a distribution, the first four moments about the point 4 are -1, 11, -30 and 100. Calculate the coefficient of skewness (B_1) and coefficient of kurtosis (B_2). Interpret the results. 5

- (b) For the continuous distribution

$$dF = kx^2(1-x)dx, 0 \leq x \leq 1,$$

find

- (i) the value of k ,
- (ii) cumulative distribution function,
- (iii) mean,
- (iv) mode,
- (v) $P\left[\frac{1}{2} < X < 1\right]$. 5

2. (a) Two discrete random variables X and Y have the following probabilities :

$$p(0, 0) = \frac{2}{9}, p(0, 1) = \frac{1}{9}, p(1, 0) = \frac{1}{9}, p(1, 1) = \frac{5}{9}.$$

Find the following : 5

- (i) The marginal probability distribution of X and Y
 - (ii) The conditional distribution of Y given X
 - (iii) $\text{Cov}(X, Y)$
 - (iv) $\text{Var}(X)$ and $\text{Var}(Y)$
- (b) Let X_1, X_2, \dots, X_5 be a random sample from the distribution with probability density function $f(x) = 6x(1 - x)$, $0 < x < 1$. If $\bar{X} = \frac{1}{5}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)$, find the mean and variance of \bar{X} . 5

3. (a) In a certain examination 2000 students appeared. The average marks obtained were 60 and the standard deviation was 10. How many students do you expect to obtain

- (i) more than 80 marks,
- (ii) less than 40 marks,
- (iii) between 50 and 70 marks ? 5

[You may like to use the following values :

$$P[Z < -2] = 0.0228, P[Z < -1] = 0.1587]$$

- (b) Given that the lines of regression are $y = x$ and $4x - y - 3 = 0$ and the second moment about the origin for x is 2.

Calculate

- (i) the mean of x and y ,
- (ii) correlation coefficient between x and y ,
- (iii) variances of x and y .

5

4. (a) Calculate quartile deviation and mean deviation from mean, for the following data :

6

Marks	No. of Students
0 - 10	6
10 - 20	5
20 - 30	8
30 - 40	15
40 - 50	7
50 - 60	6
60 - 70	3

- (b) If x is a Poisson variate such that $P(x = 1) = 2P(x = 2)$, then find the mean and variance of x . Also find $P(x = 0)$.

4

5. (a) From a city population, the probability of selecting

- (i) a male or a smoker is $7/10$,
- (ii) a male smoker is $2/5$ and
- (iii) a male, if a smoker is already selected is $2/3$.

Find the probability of selecting

- (I) a non-smoker,
- (II) a male and
- (III) a smoker, if a male is first selected.

5

(b) 200 digits were chosen at random from a set of tables. The frequencies of digits were :

Digits	Frequency
0	18
1	19
2	23
3	21
4	16
5	25
6	22
7	20
8	21
9	15

At 5% level of significance, use χ^2 -test to find the correctness of hypothesis "the digits were distributed in equal numbers".

5

[You may like to use the following values :

$$\chi_{9, 0.05}^2 = 16.9, \chi_{10, 0.05}^2 = 18.3, \chi_{11, 0.05}^2 = 19.7]$$

6. (a) Let X be a random variable with the following probability density function :

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} , & 0 \leq x \leq \theta \\ 0 , & \text{elsewhere} \end{cases}$$

The null hypothesis $H_0 : \theta = 1$ against $H_1 : \theta = 2$ to be tested by means of a single observed value of x . Find the sizes of type I and type II errors, if the critical regions are

- (i) $x \geq 0.5$
- (ii) $1 \leq x \leq 1.5$

Also obtain the power of the test for both the cases.

5

- (b) 8 coins are tossed simultaneously 256 times. Find the expected frequencies of number of heads. Find the mean and standard deviation of the distribution.

5

7. Which of the following statements are *True* and which are *False* ? Give reasons for your answer.

5×2=10

- (a) The point of intersection of 'less than' ogive and 'more than' ogive is mode.
- (b) If X and Y are two independent binomial variates with parameters (m, p) and (n, p) , respectively, then $X + Y$ is a binomial variate with parameters $(m + n, 2p)$.

- (c) Normal distribution is symmetrical.
- (d) If a random variable X has a mean 5 and variance 3, then the least value of $P\{|X - 5| < 3\}$ is $\frac{2}{3}$.
- (e) If X_1, X_2, \dots, X_n is a random sample, then the sample mean is an unbiased estimator of the population mean.
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-11 : प्राथिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 7 करना अनिवार्य है । प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।

1. (क) एक बंटन के लिए बिंदु 4 के सापेक्ष पहले चार आघूर्ण $-1, 11, -30$ और 100 हैं । वैषम्य गुणांक (B_1) और ककुदता गुणांक (B_2) परिकलित कीजिए । परिणामों की व्याख्या कीजिए ।

5

(ख) निम्नलिखित संतत बंटन

$$dF = kx^2(1-x) dx, 0 \leq x \leq 1,$$

के लिए निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

- (i) k का मान,
- (ii) संचयी बंटन फलन,
- (iii) माध्य,
- (iv) बहुलक,
- (v) $P\left[\frac{1}{2} < X < 1\right]$.

5

2. (क) दो असंतत यादृच्छिक चरों X और Y की प्रायिकताएँ निम्नलिखित हैं :

$$p(0, 0) = \frac{2}{9}, p(0, 1) = \frac{1}{9}, p(1, 0) = \frac{1}{9}, p(1, 1) = \frac{5}{9}.$$

निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

5

- (i) X और Y के उपांत प्रायिकता बंटन
- (ii) यदि X दिया हुआ हो, तो Y का सप्रतिबंध बंटन
- (iii) $\text{Cov}(X, Y)$
- (iv) $\text{Var}(X)$ और $\text{Var}(Y)$

- (ख) मान लीजिए X_1, X_2, \dots, X_5 प्रायिकता घनत्व फलन $f(x) = 6x(1-x)$, $0 < x < 1$ वाले बंटन से लिया गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। यदि

$$\bar{X} = \frac{1}{5}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5), \text{ तो } \bar{X} \text{ का माध्य और प्रसरण ज्ञात कीजिए।}$$

5

3. (क) किसी परीक्षा में 2000 विद्यार्थी उपस्थित हुए। विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त औसत अंक 60 थे और मानक विचलन 10 था। आप निम्नलिखित अंकों को पाने के लिए कितने विद्यार्थियों को प्रत्याशित करते हैं :

- (i) 80 अंकों से अधिक अंक पाने वाले,
- (ii) 40 अंकों से कम अंक पाने वाले,
- (iii) 50 और 70 के बीच अंक पाने वाले।

5

[आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं :

$$P[Z < -2] = 0.0228, P[Z < -1] = 0.1587]$$

(ख) दिया गया है कि समाश्रयण रेखाएँ $y = x$ और $4x - y - 3 = 0$ हैं और मूल-बिंदु के सापेक्ष x का दूसरा आघूर्ण 2 है।

निम्नलिखित परिकलित कीजिए :

- (i) x और y के माध्य,
- (ii) x और y के बीच सहसंबंध गुणांक,
- (iii) x और y के प्रसरण।

5

4. (क) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए चतुर्थक विचलन और माध्य से माध्य विचलन परिकलित कीजिए :

6

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0 - 10	6
10 - 20	5
20 - 30	8
30 - 40	15
40 - 50	7
50 - 60	6
60 - 70	3

(ख) यदि x एक प्वासों चर इस प्रकार है कि

$P(x = 1) = 2P(x = 2)$, तो x का माध्य और प्रसरण ज्ञात कीजिए। $P(x = 0)$ भी ज्ञात कीजिए।

4

5. (क) एक शहर की समष्टि से पाया गया कि

- (i) एक पुरुष या धूम्रपान करने वाले के चयन की प्रायिकता $7/10$ है,
- (ii) एक धूम्रपान करने वाले पुरुष के चयन की प्रायिकता $2/5$ है और
- (iii) पहले से चुने गए धूम्रपान करने वालों में से पुरुष चुनने की प्रायिकता $2/3$ है।

निम्नलिखित के चयन की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

- (I) धूम्रपान नहीं करने वाला,
- (II) एक पुरुष तथा
- (III) यदि एक पुरुष पहले चुना जाता है, तो उसका धूम्रपान करने वाला होना।

5

(ख) पहाड़ों के एक समुच्चय से 200 अंक (digits) यादृच्छया चुने गए। अंकों की बारम्बारताएँ निम्नलिखित थीं :

अंक	बारम्बारता
0	18
1	19
2	23
3	21
4	16
5	25
6	22
7	20
8	21
9	15

परिकल्पना “अंक समान संख्या में बंटा है” के सही होने की जाँच करने के लिए 5% सार्थकता स्तर पर χ^2 -परीक्षण का प्रयोग कीजिए।

5

[आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं :

$$\chi^2_{9, 0.05} = 16.9, \chi^2_{10, 0.05} = 18.3, \chi^2_{11, 0.05} = 19.7]$$

6. (क) मान लीजिए X , निम्नलिखित प्रायिकता घनत्व फलन वाला यादृच्छिक चर है :

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

x के एक प्रेक्षित मान के आधार पर $H_1 : \theta = 2$ के विरुद्ध निराकरणीय परिकल्पना $H_0 : \theta = 1$ का परीक्षण किया जाना है। प्रकार I और प्रकार II त्रुटियों का आमाप ज्ञात कीजिए, यदि क्रांतिक प्रदेश निम्नलिखित हैं :

(i) $x \geq 0.5$

(ii) $1 \leq x \leq 1.5$

दोनों स्थितियों में परीक्षण की क्षमता भी प्राप्त कीजिए। 5

- (ख) 8 सिक्के एक साथ 256 बार उछाले जाते हैं। चित आने की संख्या की प्रत्याशित बारंबारताएँ ज्ञात कीजिए। बंटन का माध्य और मानक विचलन ज्ञात कीजिए। 5

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य? अपने उत्तर के कारण दीजिए। $5 \times 2 = 10$

- (क) 'से कम' और 'से अधिक' तोरण वक्रों का प्रतिच्छेदन बिन्दु बहुलक होता है।

- (ख) यदि X और Y , क्रमशः (m, p) और (n, p) प्राचलों वाले दो स्वतंत्र द्विपद चर हैं, तो $X + Y$ प्राचलों $(m + n, 2p)$ वाला एक द्विपद चर होगा।

- (ग) प्रसामान्य बंटन सममित होता है ।
- (घ) यदि एक यादृच्छिक चर X का माध्य 5 और प्रसरण 3 है, तो $P(|X - 5| < 3)$ का न्यूनतम मान $\frac{2}{3}$ होगा ।
- (ङ) यदि X_1, X_2, \dots, X_n एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है, तो प्रतिदर्श माध्य, समष्टि माध्य का एक अनभिन्नत आकलक होगा ।
-