No. of Printed Pages : 8 **MTE-09**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

01374 **December, 2016**

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Attempt **five** questions in all. Question no. **1** is **compulsory**. Answer any **four** questions out of the questions no. 2 to 7.*

1. Are the following statements *True* or *False* ? Give reasons for your answers. *5×2=10*

(a) Complement of the open interval]0, 1[is an open set.

(b) Every bounded sequence is convergent.

(c) The function $f : [-2, 2] \to \mathbf{R}$ defined by $f(x) = \dfrac{4x+3}{x^2+1}$ is uniformly continuous.

(d) If the first derivative of a function at a point vanishes, then it has an extreme value at that point.

(e) The function $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$ defined by $f(x) = x + [x]$ is not integrable.

2. (a) Define an algebraic number. Show that $5 + \sqrt{2}$ is an algebraic number. *2*

(b) Examine the function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ defined by

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + x}{3x} & x \neq 0 \\ \dfrac{2}{3} & x = 0 \end{cases}$$

for continuity on **R**. If it is not continuous at any point in **R**, find the nature of discontinuity there. *4*

(c) Examine the function

$$f(x) = (x - 2)^2 (x + 3)^3$$

for local minima and local maxima. *4*

3. (a) Prove or disprove the following :

"The sets **Z** (of integers) and **N** (of natural numbers) are equivalent." *3*

(b) Prove that the function f defined on **R** by

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x + 10$$

is increasing in every interval. *3*

(c) Show that on the curve $y = 2x^2 + 5x + 7$, the chord joining the points whose abscissae are $x = 1$ and $x = 2$, is parallel to the tangent at the point whose abscissa is given by $x = \dfrac{3}{2}$. *4*

4. (a) Show that the equation

$$x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$$

has a real root other than $x = -1$, using Intermediate Value Theorem. 3

(b) Find $\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \ldots + \frac{1}{6n} \right]$. 4

(c) Show that a set S is closed if and only if $S = \overline{S}$, where $\overline{S}$ denotes the closure of the set S. 3

5. (a) Find a and b such that $\lim_{x \to 0} \frac{a \tan x + bx}{x^3}$ exists. 3

(b) Show that $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5}{7n+2}$ is conditionally convergent. 4

(c) For the function $f(x) = 2x + 3$ defined over $[0, 1]$, verify

$$L(P, f) \leq U(P, f),$$

where P is the partition

$$\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}.$$ 3

6. (a) Does the sequence $\{2 + (-1)^n\}$ converge to 1 ? Justify. 2

(b) State Bonnet's Mean Value Theorem for integrals. Apply it to show that

$$\left| \int_7^{10} \frac{\sin x}{x} \, dx \right| \leq \frac{2}{7}$$ 4

(c) Examine the following series for convergence : 4

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n+7}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$

7. (a) State inverse function theorem for continuous functions. Show that the function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ defined by $f(x) = 2x + 7$ has an inverse, which is continuous. Find its inverse function also. 3

(b) Test the sequence $\{f_n\}$ for uniform convergence, where $f_n(x) = \frac{2nx}{3 + n^2x^2}$, $x \in \mathbf{R}$. 3

(c) Prove by the principle of induction that

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3} n (4n^2 - 1) \; \forall \; n \in \mathbf{N}.$$

4

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न सं. 1 **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।*

---

1. क्या निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं अथवा *असत्य* ? अपने उत्तरों के कारण बताइए । *5×2=10*

(क) विवृत अन्तराल $]0, 1[$ का पूरक एक विवृत समुच्चय है ।

(ख) प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम अभिसारी होता है ।

(ग) $f(x) = \frac{4x+3}{x^2+1}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : [-2, 2] \to \mathbf{R}$ एकसमानतः संतत है ।

(घ) यदि फलन का प्रथम अवकलज एक बिंदु पर लुप्त हो जाता है, तब इसका उस बिंदु पर चरम मान होता है ।

(ङ) $f(x) = x + [x]$ द्वारा परिभाषित फलन $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$, समाकलनीय नहीं है ।

2. (क) बीजीय संख्या को परिभाषित कीजिए । दिखाइए कि $5 + \sqrt{2}$ एक बीजीय संख्या है । 2

(ख) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + x}{3x} & x \neq 0 \\ \dfrac{2}{3} & x = 0 \end{cases}$

द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ की $\mathbf{R}$ पर सांतत्य के लिए जाँच कीजिए । यदि यह $\mathbf{R}$ में किसी बिंदु पर संतत नहीं है, तब वहाँ असांतत्य का स्वरूप ज्ञात कीजिए । 4

(ग) स्थानीय निम्निष्ठ और स्थानीय उच्चिष्ठ के लिए फलन $f(x) = (x - 2)^2 (x + 3)^3$ की जाँच कीजिए । 4

3. (क) निम्नलिखित को सिद्ध या असिद्ध कीजिए :

"समुच्चय $\mathbf{Z}$ (पूर्णांकों के) और $\mathbf{N}$ (प्राकृतिक संख्याओं के) तुल्य हैं ।" 3

(ख) सिद्ध कीजिए कि

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x + 10$ द्वारा $\mathbf{R}$ पर परिभाषित फलन f प्रत्येक अन्तराल में वर्धमान है । 3

(ग) दिखाइए कि वक्र $y = 2x^2 + 5x + 7$ पर उन बिंदुओं को, जिनके भुज $x = 1$ और $x = 2$ हैं, मिलाने वाली जीवा उस बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा के समान्तर होती है जिसका भुज $x = \dfrac{3}{2}$ होता है । 4

4. (क) मध्यवर्ती मान प्रमेय द्वारा दिखाइए कि समीकरण $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ का $x = -1$ के अलावा वास्तविक मूल होता है । 3

(ख) $\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \ldots + \frac{1}{6n} \right]$ ज्ञात कीजिए । 4

(ग) दिखाइए कि समुच्चय S संवृत है यदि और केवल यदि $S = \overline{S}$, जहाँ $\overline{S}$ समुच्चय S के संवरक को निर्दिष्ट करता है । 3

5. (क) ऐसा a और b ज्ञात कीजिए जिसके लिए

$\lim_{x \to 0} \frac{a \tan x + bx}{x^3}$ का अस्तित्व है । 3

(ख) दिखाइए कि $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5}{7n+2}$ सप्रतिबंधतः अभिसारी है । 4

(ग) [0, 1] पर परिभाषित फलन $f(x) = 2x + 3$ के लिए सत्यापित कीजिए कि

$L(P, f) \leq U(P, f)$,

जहाँ P, विभाजन

$\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ है । 3

6. (क) क्या अनुक्रम $\{2 + (-1)^n\}$, 1 की ओर अभिसरण करता है ? पुष्टि कीजिए । 2

(ख) समाकलों के लिए बोनट माध्य मान प्रमेय का कथन दीजिए । इस प्रमेय को लागू करके दिखाइए कि

$$\left| \int_7^{10} \frac{\sin x}{x} \, dx \right| \leq \frac{2}{7}$$ 4

(ग) अभिसरण के लिए निम्नलिखित श्रेणियों की जाँच कीजिए : 4

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n+7}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$

7. (क) संतत फलनों के लिए प्रतिलोम फलन प्रमेय का कथन दीजिए । दिखाइए कि $f(x) = 2x + 7$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ का प्रतिलोम होता है, जो संतत होता है । इसका प्रतिलोम फलन भी ज्ञात कीजिए । 3

(ख) एकसमान अभिसरण के लिए अनुक्रम $\{f_n\}$ की जाँच कीजिए, जहाँ $f_n(x) = \frac{2nx}{3 + n^2x^2}$, $x \in \mathbf{R}$. 3

(ग) आगमन नियम द्वारा सिद्ध कीजिए कि

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3} n (4n^2 - 1) \; \forall \; n \in \mathbf{N}.$$

4