No. of Printed Pages : 8

MTE-08

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

02547

December, 2016

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 1 is* ***compulsory****. Answer any* ***four*** *questions out of the remaining questions no. 2 to 7. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

1. State whether the following statements are *True* or *False*. Justify your answer with the help of a short proof or a counter-example. *5×2=10*

(a) The differential equation of a family of tangent lines to the parabola $y = x^2$, given by $2xt = y + t^2$, t being a parameter, is $4\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$.

(b) $\frac{dy}{dx} = \int_0^x e^{xs}\, y(s)\, ds$ is a differential equation of order 1.

(c) The trial solution for a particular integral using the method of undetermined coefficients, for the differential equation

$$(D^2 + 4D + 7)\, y = x^3 e^{-x} \cos x$$

is $(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\, e^{-x} \cos x$.

(d) The Pfaffian differential equation

$$(2xy^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)\, dx + dy + 2z\, dz = 0$$

is integrable.

(e) The second order partial differential equation

$$y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + 2x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$$

is a parabolic.

2. (a) Find the solution $\theta(x, t)$ of the following p.d.e. using the method of separation of variables :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

with

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\theta(0, t) = \frac{\partial}{\partial x}\theta(\pi, t) = 0 \\ &\text{and } \theta(x, 0) = f(x) \end{aligned}\right\} \text{for } 0 \le x \le \pi. \qquad 6$$

(b) Find the complete integral of the equation

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{\partial z}{\partial y}(z - a). \qquad 4$$

3. (a) Find the equation of the integral surface of the differential equation

$$2y(z-3)p + (2x-z)q = y(2x-3)$$

which passes through the circle

$$z = 0,\ x^2 + y^2 = 2x.$$ *6*

(b) Solve :

$$x(x^2 + y^2 - a^2)\,dx + y(x^2 + y^2 - b^2)\,dy = 0,$$

where a, b are constants. *4*

4. (a) Solve : *3*

$$y = 2px + p^4x^2$$

(b) Solve, by changing the dependent variable, the differential equation

$$\cos^2 x \frac{d^2y}{dx^2} - 2 \sin x \cos x \frac{dy}{dx} + (\cos^2 x)\, y = 0.$$ *4*

(c) Solve : *3*

$$(D^3 - DD'^2 + D^2 + DD')\, z = (x+2) + e^{x-y}$$

5. (a) Using $x^2 = t$, reduce the equation

$$2xy\,dx + (1 - x^2 + 2y)\,dy = 0$$

to the linear form and hence solve it. *4*

(b) Solve : *6*

$$(D^4 + 2D^3 - 3D^2)\, y = x^2 + 3e^{2x} + 4 \sin x$$

6. (a) Solve : *4*

$$\frac{dx}{x + y - xy^2} = \frac{dy}{x^2y - x - y} = \frac{dz}{z(y^2 - x^2)}$$

(b) A vibrational system consisting of mass $\frac{1}{10}$ kg is attached to a spring (spring constant = 4 kg/m). The mass is released from rest 1 m below the equilibrium position. The motion is damped (damping constant = 1·2) and is being driven by an external force 5 sin 4t, beginning at t = 0. Write the governing equations of the system and interpret the type of motion. Hence find the position of mass at time t. 4

(c) Using X = x − 2, Y = y + 1, reduce the equation

$$4(x-2)^2 \frac{dy}{dx} = (x + y - 1)^2$$

to the homogeneous form of 1st order equation. 2

7. (a) Find the integral of the p.d.e. 4

$$(3D^2 - 2D'^2 + D - 1)\, z = 4\, e^{x+y} \cos(x + y).$$

(b) A string is stretched and fastened to two points distance l apart. Motion is started by displacing the string into the form $y = k(lx - x^2)$, from which it is released at time t = 0. Write the governing differential equation and initial and boundary conditions, for this problem. 3

(c) Solve $\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$, using variable separable method. 3

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट: *प्रश्न सं. 1 करना अनिवार्य है । शेष प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।*

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । लघु उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *5×2=10*

   (क) $2xt = y + t^2$ जहाँ t एक प्राचल है, द्वारा दिए जाने वाले, परवलय $y = x^2$ की स्पर्श रेखाओं के, वक्र-कुल का अवकल समीकरण

   $$4\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \text{ है ।}$$

   (ख) $\frac{dy}{dx} = \int_0^x e^{xs}\, y(s)\, ds$ कोटि 1 का अवकल समीकरण है ।

(ग) अनिर्धारित गुणांक विधि द्वारा अवकल समीकरण

$$(D^2 + 4D + 7)\, y = x^3\, e^{-x} \cos x$$

का विशेष समाकल हल प्राप्त करने के लिए जाँच हल

$$(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\, e^{-x} \cos x \text{ है ।}$$

(घ) फैफियन अवकल समीकरण

$$(2xy^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)\, dx + dy + 2z\, dz = 0$$

समाकलनीय है ।

(ङ) द्वितीय कोटि आंशिक अवकल समीकरण

$$y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + 2x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$$

परवलयिक है ।

2. (क) चर पृथक्करण विधि द्वारा निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

का हल $\theta(x, t)$ ज्ञात कीजिए जहाँ,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x}\,\theta(0, t) = \dfrac{\partial}{\partial x}\,\theta(\pi, t) = 0 \\ \text{और } \theta(x, 0) = f(x) \end{array}\right\},\ 0 \le x \le \pi \text{ के लिए ।} \quad 6$$

(ख) समीकरण

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{\partial z}{\partial y}(z - a)$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए । 4

3. (क) अवकल समीकरण

$$2y(z-3)p + (2x-z)q = y(2x-3)$$

का समाकल पृष्ठ का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वृत्त

$$z = 0,\ x^2 + y^2 = 2x$$

से होकर जाता है । 6

(ख) हल कीजिए :

$$x(x^2 + y^2 - a^2)\,dx + y(x^2 + y^2 - b^2)\,dy = 0,$$

जहाँ a, b अचर हैं । 4

4. (क) हल कीजिए : 3

$$y = 2px + p^4x^2$$

(ख) परतंत्र चर की परिवर्तन विधि द्वारा अवकल समीकरण

$$\cos^2 x \frac{d^2y}{dx^2} - 2\sin x \cos x \frac{dy}{dx} + (\cos^2 x)\,y = 0$$

का हल प्राप्त कीजिए । 4

(ग) हल कीजिए : 3

$$(D^3 - DD'^2 + D^2 + DD')\,z = (x+2) + e^{x-y}$$

5. (क) $x^2 = t$ का प्रयोग करके समीकरण

$$2xy\,dx + (1 - x^2 + 2y)\,dy = 0$$

को रैखिक रूप में समानीत कीजिए और अतः इसका हल प्राप्त कीजिए । 4

(ख) हल कीजिए : 6

$$(D^4 + 2D^3 - 3D^2)\,y = x^2 + 3e^{2x} + 4\sin x$$

6. (क) हल कीजिए : 4

$$\frac{dx}{x + y - xy^2} = \frac{dy}{x^2y - x - y} = \frac{dz}{z(y^2 - x^2)}$$

(ख) द्रव्यमान $\frac{1}{10}$ kg वाले एक कंपन मान तंत्र को एक कमानी (कमानी स्थिरांक = 4 kg/m) से जोड़ा गया । द्रव्यमान को विरामावस्था में साम्य स्थिति से 1 m नीचे बिंदु से छोड़ा गया । गति अवमंदित (अवमंदक स्थिरांक = 1·2) है और यह $t = 0$ पर लगाए गए एक बाह्य बल $5 \sin 4t$ द्वारा गतिमान हो रही है । तंत्र को निर्धारित करने वाला समीकरण लिखिए और गति के प्रकार का निर्वचन कीजिए । अतः समय t पर द्रव्यमान की स्थिति ज्ञात कीजिए । *4*

(ग) $X = x - 2$, $Y = y + 1$ के प्रयोग द्वारा समीकरण

$$4(x-2)^2 \frac{dy}{dx} = (x + y - 1)^2$$

को प्रथम कोटि समघात समीकरण में समानीत कीजिए । *2*

7. (क) आंशिक अवकल समीकरण

$$(3D^2 - 2D'^2 + D - 1)\, z = 4\, e^{x+y} \cos(x + y)$$

का समाकल ज्ञात कीजिए । *4*

(ख) एक डोरी को खींचकर दूरी l पर स्थित दो बिंदुओं से बाँध दिया गया है । $y = k(lx - x^2)$ के रूप में डोरी को विस्थापित करके गति को शुरू किया जाता है और इसी रूप में इसे समय $t = 0$ पर छोड़ा जाता है । इस समस्या को निर्धारित करने वाला अवकल समीकरण तथा आदि व परिसीमा प्रतिबंध लिखिए । *3*

(ग) चर पृथक्करण विधि द्वारा समीकरण

$$\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$$

का हल प्राप्त कीजिए । *3*