No. of Printed Pages : 8

MTE-07

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

01687

Term-End Examination

December, 2016

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : *Question no. 1 is* ***compulsory****. Attempt any* ***four*** *questions out of the remaining questions. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

1. State whether the following statements are *True* or *False*. Give a short proof or a counter-example in support of your answer. *5×2=10*

(a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$ is a $\left(\frac{0}{0} \right)$ form.

(b) $f(x, y) = \frac{\sin\left(\frac{x^2 y}{x^3 + y^3} \right)}{ln\left(\frac{x+y}{x} \right)}$ is a homogeneous function of degree 2.

(c) Domain of $f(x, y) = \frac{xy}{x^4 + y^4}$ is $\mathbf{R}^2$.

(d) The function $f(x, y) = (x^3y + 1, x^2 + y^2)$ is locally invertible at (1, 2).

(e) The function f, defined by $f(x, y) = x^3 + y^3$ is integrable on $[1, 2] \times [1, 3]$.

2. (a) If $f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{y}\right) + y \sin\left(\frac{1}{x}\right), & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$

show that the repeated limits of f do not exist. Examine the function for simultaneous limit at the origin. 5

(b) Check whether the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ defined by $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$ has an extrema at (0, 0). 5

3. (a) Expand $x^2y + 3y - 2$ in powers of $(x - 1)$ and $(y + 2)$. 5

(b) If

$$f(x, y) = x^2 \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right), \; x \neq 0, y \neq 0$$

$$= 0, \qquad x = 0 = y$$

prove that $\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. 5

4. (a) Show that the line integral

$$\int_{(-1,2)}^{(3,1)} (y^2 + 2xy)\,dx + (x^2 + 2xy)\,dy$$

is independent of path and evaluate it. *4*

(b) If $z = e^{xy^2}$, $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, compute $\frac{dz}{dt}$ at $t = \frac{\pi}{2}$. *3*

(c) Examine whether $\lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x}}{e^{1/x} + 1}$ exists or not. *3*

5. (a) Let $x = e_1 + e_2 - 2e_3$, $y = 2e_1 - e_2 + e_3$, where e_1, e_2, e_3 are unit vectors. Find $|x + 2y|$ and $|x + y|$. *2*

(b) Show that

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,dy = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,dx. \quad 4$$

(c) Show that the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is continuous at the origin. *4*

6. (a) Find the mass of an object which is in the form of a cuboid $[0, 1] \times [2, 4] \times [1, 3]$. The density at any point (x, y, z) on the cuboid is given by $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. *5*

(b) Show that the functions $f(x, y) = ln\ x - ln\ y$ and $g(x, y) = \dfrac{x^2 + 2y^2}{2xy}$ are functionally dependent. *3*

(c) Find the domain and range of the function f defined as $f(x, y) = \dfrac{3x^2y^2}{x^2 + y^4}$. *2*

7. (a) Find the value of 'k' for which $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \sin 2x + k \sin x}{x^3}$ is finite. Hence evaluate the limit. *3*

(b) Evaluate the integral by converting to polar coordinates $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \int_y^{\sqrt{4 - y^2}} \frac{dx\ dy}{4 + x^2 + y^2}$. *4*

(c) Consider the function

$$f(x, y) = 5xy - ln\ xy - 5.$$

Check whether there exists a continuously differentiable function g defined by $f(x, y) = 0$ in the neighbourhood of $x = 3$, such that $g(3) = \dfrac{1}{3}$. Find $g'(3)$, if it exists. *3*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का 70%)

नोट: *प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है । शेष प्रश्नों में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।*

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । अपने उत्तर के पक्ष में लघु उपपत्ति या प्रत्युदाहरण दीजिए । *5×2=10*

(क) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right), \left(\frac{0}{0} \right)$ रूप का है ।

(ख) $f(x, y) = \frac{\sin\left(\frac{x^2 y}{x^3 + y^3} \right)}{ln\left(\frac{x+y}{x} \right)}$ घात 2 का समघात फलन है ।

(ग) $f(x, y) = \frac{xy}{x^4 + y^4}$ का प्रांत $\mathbf{R}^2$ है ।

(घ) फलन $f(x, y) = (x^3y + 1, x^2 + y^2)$, $(1, 2)$ पर स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है ।

(ङ) $f(x, y) = x^3 + y^3$ द्वारा परिभाषित फलन f, $[1, 2] \times [1, 3]$ पर समाकलनीय है ।

2. (क) यदि $f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{y}\right) + y \sin\left(\frac{1}{x}\right), & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$

तो दिखाइए कि f की पुनरावृत्ति सीमाओं का अस्तित्व नहीं होता । मूल-बिन्दु पर इस फलन की युगपत सीमा के अस्तित्व की जाँच कीजिए । 5

(ख) जाँच कीजिए कि क्या $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ का $(0, 0)$ पर चरम मान होता है या नहीं । 5

3. (क) $(x - 1)$ और $(y + 2)$ की घातों में $x^2y + 3y - 2$ का प्रसार कीजिए । 5

(ख) यदि

$$f(x, y) = x^2 \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right), \quad x \neq 0, y \neq 0$$

$$= 0, \qquad x = 0 = y$$

सिद्ध कीजिए कि $\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. 5

4. (क) दिखाइए कि रेखा समाकल

$$\int_{(-1,2)}^{(3,1)} (y^2 + 2xy)\,dx + (x^2 + 2xy)\,dy$$

पथ स्वतंत्र है और इसका मूल्यांकन कीजिए । 4

(ख) यदि $z = e^{xy^2}$, $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, तब $t = \frac{\pi}{2}$ पर $\frac{dz}{dt}$ ज्ञात कीजिए । 3

(ग) जाँच कीजिए कि $\lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x}}{e^{1/x} + 1}$ का अस्तित्व है या नहीं । 3

5. (क) मान लीजिए $x = e_1 + e_2 - 2e_3$, $y = 2e_1 - e_2 + e_3$, जहाँ e_1, e_2, e_3 मात्रक सदिश हैं । $|x + 2y|$ और $|x + y|$ ज्ञात कीजिए । 2

(ख) दिखाइए कि

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,dy = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,dx. \quad 4$$

(ग) दिखाइए कि फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

मूल-बिन्दु पर संतत है । 4

6. (क) घनाभ $[0, 1] \times [2, 4] \times [1, 3]$ आकार वाली वस्तु का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए । घनाभ का किसी भी बिन्दु (x, y, z) पर घनत्व $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ द्वारा दिया गया है । 5

(ख) दिखाइए कि फलन $f(x, y) = ln\ x - ln\ y$ और $g(x, y) = \dfrac{x^2 + 2y^2}{2xy}$ फलनिकतः आश्रित हैं । 3

(ग) $f(x, y) = \dfrac{3x^2y^2}{x^2 + y^4}$ के रूप में परिभाषित फलन f का प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए । 2

7. (क) 'k' का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \sin 2x + k \sin x}{x^3}$ परिमित है । इस मान के साथ सीमा का मूल्यांकन कीजिए । 3

(ख) निम्नलिखित समाकल को ध्रुवीय निर्देशांकों में परिवर्तित करके इसका मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^{\sqrt{3}} \int_y^{\sqrt{4 - y^2}} \frac{dx\, dy}{4 + x^2 + y^2}.$$ 4

(ग) फलन $f(x, y) = 5xy - ln\ xy - 5$ लीजिए । जाँच कीजिए कि क्या $x = 3$ के प्रतिवेश में $f(x, y) = 0$ द्वारा परिभाषित संततः अवकलनीय फलन g का अस्तित्व होता है या नहीं, जहाँ कि $g(3) = \dfrac{1}{3}$. यदि अस्तित्व होता है, तो $g'(3)$ ज्ञात कीजिए । 3