No. of Printed Pages : 8

MTE-06

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

02194

Term-End Examination

December, 2016

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Attempt **five** questions in all. Question no. 7 is **compulsory**. Answer any **four** questions from questions no. 1 to 6. Use of calculators is **not** allowed.*

---

1. (a) Let $\mathbf{R}[x]$ denote the set of all polynomials in x with real coefficients. On $\mathbf{R}[x]$, define a relation ~ by $f(x) \sim g(x)$ if $f'(x) = g'(x)$, where $f'(x)$ is the derivative of $f(x)$. Show that ~ is an equivalence relation on $\mathbf{R}[x]$. For any $f(x) \in \mathbf{R}[x]$, determine the equivalence class $[f(x)]$. *3*

(b) Let $G = GL(2, \mathbf{R})$ be the group of 2×2 invertible matrices over $\mathbf{R}$ (with respect to multiplication) and let

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \text{ a and b are non-zero rational numbers} \right\}.$$

Is H an abelian subgroup of G ? Justify your answer. *3*

(c) Show that $x^2 + x + 4$ is irreducible over $\mathbf{Z}_{11}$. *4*

2. (a) Let $A = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $B = \mathbf{R} \setminus \{2\}$ and $f : A \to B$ and $g : B \to A$ be defined by $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ and $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$. Check whether f and g are functions. Compute gof. Are f and g invertible functions ? Justify your answer. *4*

(b) Is the ideal generated by $x^2 + 1$ in $\mathbf{Z}_2[x]$ a prime ideal of $\mathbf{Z}_2[x]$? Give reasons for your answer. *3*

(c) Let $f : \mathbf{Z}_5 \to \mathbf{Z}_{10}$ be given by $f(x) = 5x, \forall x \in \mathbf{Z}_5$. Is f a homomorphism of groups ? Justify your answer. *3*

3. (a) Let $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbf{R} \right\}$. Check whether S is a ring with identity. *4*

(b) If G is a finite abelian group of odd order, prove that the product of all elements in G is equal to the identity element of G. *4*

(c) Is the ring $2\mathbf{Z}$ isomorphic to the ring $3\mathbf{Z}$? Justify your answer. *2*

4. (a) If H is a subgroup of G of index 2, prove that H is normal in G. *2*

(b) Let $\beta \in S_7$ and suppose $\beta^4 = (2143567)$. Find β. *4*

(c) Give with justification two factorizations of 46 as a product of irreducible elements in $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$. *4*

5. (a) Let R be a PID and I be an ideal of R. Is the quotient ring R/I a PID ? Give reasons for your answer. *3*

(b) Prove that every group of order 63 has a proper non-trivial subgroup. *3*

(c) Let I be an ideal of a ring R. Define

$[R : I] = \{x \in R \mid rx \in I \text{ for all } r \in R\}$

Prove that :

(i) $[R : I]$ is an ideal of R.

(ii) $I \subseteq [R : I]$. *4*

6. (a) Consider the ring $S = \mathbf{R}[x] / \langle x^2 - 3x + 2 \rangle$.

(i) Give two distinct elements of S with justification.

(ii) Does S have zero divisors ? Justify your answer. *4*

(b) Let $(\mathbf{C}^*, \cdot)$ denote the group of non-zero complex numbers and $S = \{z \in \mathbf{C}^* \mid |z| = 1\}$. Show that $\mathbf{C}^* / S \simeq \mathbf{R}^+$ where $(\mathbf{R}^+, \cdot)$ is the group of positive real numbers. *4*

(c) Give an example of an infinite field of characteristic $p \neq 0$, where p is a prime. *2*

7. Which of the following statements are *true* and which are *false* ? Give reasons for your answers. *5×2=10*

(a) There exists a non-cyclic group in which every proper subgroup is cyclic.

(b) In a commutative ring, every prime ideal is maximal.

(c) Any group of order ≤ 3 is abelian.

(d) The field of complex numbers **C** contains a subfield with finite number of elements.

(e) There exists a field with 99 elements.

एम.टी.ई.-06

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *कुल* ***पाँच*** *प्रश्न कीजिए । प्रश्न सं. 7 करना* ***अनिवार्य*** *है । प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं* ***चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति* ***नहीं*** *है ।*

---

1. (क) मान लीजिए $\mathbf{R}[x]$, x में वास्तविक गुणांकों वाले सभी बहुपदों के समुच्चय को निरूपित करता है । $\mathbf{R}[x]$ पर, संबंध ~ इस प्रकार परिभाषित कीजिए कि $f(x) \sim g(x)$ यदि $f'(x) = g'(x)$, जहाँ $f'(x)$, $f(x)$ का अवकलज है । दिखाइए कि ~, $\mathbf{R}[x]$ पर एक तुल्यता-संबंध है । किसी भी $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ के लिए, तुल्यता-वर्ग $[f(x)]$ निर्धारित कीजिए । *3*

(ख) मान लीजिए $G = GL(2, \mathbf{R})$ (गुणन के सापेक्ष) $\mathbf{R}$ पर 2×2 व्युत्क्रमणीय आव्यूहों का समूह है और मान लीजिए

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \text{ a और b शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं} \right\}.$$

क्या H, G का आबेली उपसमूह है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 3

(ग) दिखाइए कि $x^2 + x + 4$, $\mathbf{Z}_{11}$ पर अखंडनीय है । 4

2. (क) मान लीजिए $A = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $B = \mathbf{R} \setminus \{2\}$ और $f : A \to B$ और $g : B \to A$, $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ और $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$ द्वारा परिभाषित हैं । जाँच कीजिए कि f और g फलन हैं या नहीं । $g o f$ परिकलित कीजिए । क्या f और g व्युत्क्रमणीय फलन हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 4

(ख) $\mathbf{Z}_2[x]$ में $x^2 + 1$ द्वारा जनित गुणजावली क्या $\mathbf{Z}_2[x]$ की अभाज्य गुणजावली है ? अपने उत्तर के कारण बताइए । 3

(ग) मान लीजिए $f : \mathbf{Z}_5 \to \mathbf{Z}_{10}$, $f(x) = 5x$, $\forall x \in \mathbf{Z}_5$ द्वारा दिए गए हैं । क्या f समूहों की समाकारिता है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 3

3. (क) मान लीजिए $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbf{R} \right\}$. जाँच कीजिए कि S तत्समकी वलय है या नहीं । 4

(ख) यदि G विषम कोटि का परिमित आबेली समूह है, तब सिद्ध कीजिए कि G के सभी अवयवों का गुणनफल G के तत्समक अवयव के बराबर है । *4*

(ग) क्या वलय $2\mathbf{Z}$ वलय $3\mathbf{Z}$ के तुल्याकारी है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *2*

4. (क) यदि H सूचकांक 2 के G का उपसमूह है, तब सिद्ध कीजिए कि H, G में प्रसामान्य है । *2*

(ख) मान लीजिए $\beta \in S_7$ और मान लीजिए $\beta^4 = (2143567)$. तब β ज्ञात कीजिए । *4*

(ग) $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ में पुष्टि सहित अखंडनीय अवयवों के गुणनफल के रूप में 46 के दो अलग-अलग गुणनखंड दीजिए । *4*

5. (क) मान लीजिए R एक PID है और I, R की गुणजावली है । क्या विभाग वलय R/I एक PID है ? अपने उत्तर के कारण बताइए । *3*

(ख) सिद्ध कीजिए कि कोटि 63 वाले प्रत्येक समूह का एक उचित प्रसामान्य अतुच्छ उपसमूह होता है । *3*

(ग) मान लीजिए I, वलय R की एक गुणजावली है । निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए :

$[R : I] = \{x \in R \mid$ सभी $r \in R$ के लिए $rx \in I\}$

सिद्ध कीजिए कि :

(i) $[R : I]$, R की एक गुणजावली है ।

(ii) $I \subseteq [R : I]$. *4*

6. (क) वलय $S = \mathbf{R}[x] / \langle x^2 - 3x + 2\rangle$ लीजिए ।

   (i) पुष्टि सहित S के दो अलग-अलग अवयव दीजिए ।

   (ii) क्या S के शून्य विभाजक होते हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *4*

(ख) मान लीजिए $(\mathbf{C}^*, \cdot)$ शून्येतर सम्मिश्र संख्याओं के समूह को निरूपित करता है और $S = \{z \in \mathbf{C}^* \mid |z| = 1\}$. दिखाइए कि $\mathbf{C}^*/S \simeq \mathbf{R}^+$ जहाँ $(\mathbf{R}^+, \cdot)$ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समूह है । *4*

(ग) अभिलक्षणिक $p \neq 0$ के अपरिमित क्षेत्र का एक उदाहरण दीजिए, जहाँ p अभाज्य है । *2*

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन *सत्य* हैं और कौन-से *असत्य* हैं । अपने उत्तरों के कारण बताइए । *5×2=10*

(क) एक ऐसे अचक्रीय समूह का अस्तित्व होता है जिसमें प्रत्येक उचित उपसमूह चक्रीय होता है ।

(ख) क्रमविनिमेय वलय में, प्रत्येक अभाज्य गुणजावली उच्चिष्ठ है ।

(ग) कोटि ≤ 3 का कोई भी समूह आबेली है ।

(घ) सम्मिश्र संख्याओं के क्षेत्र **C** में अवयवों के परिमित संख्या वाला उपक्षेत्र होता है ।

(ङ) 99 अवयवों वाले एक क्षेत्र का अस्तित्व होता है ।